

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2013/2014

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Modelowanie matematyczne

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

|                                         |                       |
|-----------------------------------------|-----------------------|
| NAZWA PRZEDMIOTU                        | Matematyka dyskretna  |
| NAZWA PRZEDMIOTU<br>W JĘZYKU ANGIELSKIM |                       |
| KOD PRZEDMIOTU                          | WFMiI M oIS B10 13/14 |
| KATEGORIA PRZEDMIOTU                    | Przedmioty podstawowe |
| LICZBA PUNKTÓW ECTS                     | 6.00                  |
| SEMESTRY                                | 3                     |

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

| SEMESTR | WYKŁAD | ĆWICZENIA | LABORATORIUM | LABORATORIUM<br>KOMPUTERO-<br>WE | SEMINARIUM | PROJEKT |
|---------|--------|-----------|--------------|----------------------------------|------------|---------|
| 3       | 30     | 30        | 0            | 0                                | 0          | 0       |

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Zapoznanie studenta z podstawowymi pojęciami i metodami matematyki dyskretniej.

**Cel 2** Umiejętność rozpoznania wśród problemów praktycznych takich, do których można zastosować metody matematyki dyskretniej. Rozwiązywanie niektórych takich problemów.

**Cel 3** Rozwijanie umiejętności komunikacji.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

- 1 Zaliczony przedmiot Wstęp do logiki i teorii mnogości.
- 2 Dobra znajomość metody indukcji matematycznej.
- 3 Znajomość algebry w zakresie podstaw teorii grup i podstaw teorii pierścieni.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student zna podstawowe definicje i twierdzenia przedstawione na wykładach.

**EK2 Umiejętności** Student umie stosować pozostałe poznane algorytmy: algorytm Euklidesa, algorytmy z teorii grafów, algorytmy szyfrujące: El Gammala, DES, Diffiego- Hellmana.

**EK3 Umiejętności** Student umie komunikować swoją wiedzę, przedstawić klarownie i ścisłe rozumowania matematyczne, zarówno w formie pisemnej jak i ustnej. Umie jasno sformułować pytanie.

**EK4 Kompetencje społeczne** Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom. Odpowiedzialnie traktuje swoje wypowiedzi: odróżnia przypuszczenia od faktów potwierdzonych. Szanuje sądy innych i odnosi się do nich merytorycznie. Jest etyczny: szanuje cudzą własność intelektualną.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

| WYKŁAD    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                  |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W1</b> | Aksjomaty liczb całkowitych. Podstawy arytmetyki liczb całkowitych. Podzielność. NWD i NWW. Algorytm Euklidesa. Reprezentacja liczb całkowitych w systemach o różnych podstawach. Liczby pierwsze Twierdzenie, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Sito Eratostenesa. Rozmieszczenie liczb pierwszych.                                                                                       | 4                |
| <b>W2</b> | Kryptografia: klasyfikacja algorytmów szyfrujących. Podpis cyfrowy. Algorytmy: RSA, El gammala, Diffiego-Hellmana, DES. Szyfry strumieniowe.                                                                                                                                                                                                                                                           | 10               |
| <b>W3</b> | Kwadraty łacińskie i design. Metoda funkcji tworzących.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2                |
| <b>W4</b> | Zasady zliczania: wzór włącz-wyłącz, zasada iloczynu, zasada szufladkowa Dirichleta. Wariacje, permutacje, kombinacje, kombinacje z powtórzeniami, permutacje z powtórzeniami. Ilość sposobów rozmieszczenia w k pudełkach n przedmiotów (rozdzielalnych lub nie).                                                                                                                                     | 4                |
| <b>W5</b> | Pojęcie grafu nieskierowanego. Podstawowe własności grafów (spójność, reprezentacja), problemy poruszania się po krawędziach grafu (cykl Eulera, cykl Hamiltona). Drogi minimalne i maksymalne w digrafach z wagami (algorytm Dijkstry i algorytm Bellmana). Drzewa i lasy. Problem minimalnego drzewa spinającego (algorytm Prima i Kruskala). Podstawowe zagadnienia związane z kolorowaniem grafów. | 10               |

| ĆWICZENIA |                                                                                                                                                          |                  |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                   | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>C1</b> | Stosowanie zasady indukcji. Ciągi definiowane rekurencyjnie.                                                                                             | 2                |
| <b>C2</b> | Dowodzenie prostych faktów arytmetycznych. Algorytm Euklidesa i jego zastosowania.                                                                       | 4                |
| <b>C3</b> | Przystawanie modulo $n$ , równania kongruencyjne. Zastosowania. Układy równań kongruencyjnych. Zastosowania małego twierdzenia Fermata.                  | 4                |
| <b>C4</b> | Stosowanie algorytmów szyfrujących.                                                                                                                      | 6                |
| <b>C5</b> | Zliczanie obiektów kombinatorycznych.                                                                                                                    | 4                |
| <b>C6</b> | Ilustracja podstawowych pojęć z teorii grafów. Informacje uzyskiwane z macierzy grafu i jej potęg. Zagadnienia praktyczne modelowane przy pomocy grafów. | 2                |
| <b>C7</b> | Rozpoznawanie grafów eulerowskich i hamiltonowskich. Stosowanie algorytmów grafowych.                                                                    | 8                |

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

**N1** Dyskusja

**N2** Konsultacje

**N3** Wykłady

**N4** Zadania tablicowe

**N5** Praca w grupach

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

| FORMA AKTYWNOŚCI                                                                                 | ŚREDNIA LICZBA GODZIN<br>NA ZREALIZOWANIE<br>AKTYWNOŚCI |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>                                     |                                                         |
| Godziny wynikające z planu studiów                                                               | 0                                                       |
| Konsultacje przedmiotowe                                                                         | 8                                                       |
| Egzaminy i zaliczenia w sesji                                                                    | 7                                                       |
| <b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b> |                                                         |
| Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury                               | 75                                                      |
| Opracowanie wyników                                                                              | 20                                                      |
| Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji                                           | 10                                                      |
| <b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z<br/>CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>    | <b>120</b>                                              |
| SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU                                                    | 6.00                                                    |

## 9 SPOSOBY OCENY

### OCENA FORMUJĄCA

**F1** Ćwiczenie praktyczne

**F2** Kolokwium

**F3** Odpowiedź ustna

**F4** Zadanie tablicowe

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

**P1** Średnia ważona ocen formujących

**P2** Egzamin pisemny

**P3** Egzamin ustny

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

**W1** Aby zaliczyć przedmiot, należy uzyskać pozytywną ocenę z każdego efektu kształcenia.

**W2** Wszystkie oceny podsumowujące muszą być pozytywne.

**W3** W niektórych przypadkach prowadzący przedmiot zwalnia studenta z egzaminu pisemnego..

**W4** Ocena końcowa jest średnią z trzech ocen podsumowujących. W przypadku wyniku pośredniego, zaokrąglany jest on w kierunku oceny P1.

## OCENA AKTYWNOŚCI BEZ UDZIAŁU NAUCZYCIELA

**B1** Ćwiczenie praktyczne

**B2** Test

## KRYTERIA OCENY

| EFEKT KSZTAŁCENIA 1 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| NA OCENĘ 3.0        | Student zna wszystkie spośród definicji następujących pojęć: liczba pierwsza, graf nieskierowany, macierz grafu, trasa, ścieżka, droga, cykl, podzielność, NWD, NWW, przystawanie modulo $n$ , ciąg Fibonacciego. Student umie wypowiedzieć poprawnie każde z następujących twierdzeń: zasada indukcji, zasada minimum, algorytm dzielenia, wzór włącz-wyłącz, zasadę Dirichleta, twierdzenia dotyczące zliczania permutacji i wariacji. Ponadto student potrafi wypowiedzieć niektóre inne definicje i twierdzenia, być może z niewielkimi usterkami. Potrafi przedstawić dowody niektórych nietrudnych twierdzeń.                                                                                           |
| NA OCENĘ 3.5        | Student spełnia wymagania na ocenę dostateczną, przy czym lista definicji i twierdzeń obowiązkowych jest rozszerzona o następujące: reprezentacja liczb naturalnych w systemach o różnych podstawach, lemat uzasadniający poprawność sita Eratostenesa, twierdzenie, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, małe twierdzenie Fermata, chińskie twierdzenie o resztach, struktura ilorazowa liczb całkowitych przy dzieleniu przez przystawanie modulo $n$ . Student nie myli twierdzenia z twierdzeniem odwrotnym ani tezy z założeniami. W swoich argumentacjach klarownie odróżnia to, co wiadomo, od tego co należy dowieść. Potrafi przedstawić poprawnie dowody większości nietrudnych twierdzeń. |
| NA OCENĘ 4.0        | Student spełnia kryteria na ocenę 3.5, przy czym lista pojęć i twierdzeń obowiązkowych rozszerza się o: równoważność zasady indukcji i zasady minimum, pojęcie systemu dedukcyjnego, algebry Boole'a, liczby pierwsze merseńskie i liczby pierwsze Fermata, liniowe zależności rekurencyjne rzędu drugiego i metody ich rozwiązywania. Student umie przedstawić dowody większości poznanych twierdzeń, być może z niewielkimi usterkami.                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| NA OCENĘ 4.5        | Student zna prawie wszystkie pojęcia podane na wykładzie i umie zilustrować je przykładami i kontrprzykładami. Student poprawnie wypowiada wszystkie twierdzenia. Potrafi przedstawić dowody prawie wszystkich poznanych twierdzeń. W przypadku zauważenia usterki, sam potrafi ją skorygować.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| NA OCENĘ 5.0        | Student zna wszystkie definicje i twierdzenia podane na wykładzie. Wypowiada je bezbłędnie, ilustrując przykładami. Zna dowody wszystkich twierdzeń z kursu. Jego wypowiedzi są płynne, precyzyjne i jasne.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 2 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| NA OCENĘ 3.0        | Student umie stosować przynajmniej następujące poznane algorytmy: sito Eratostenesa, schemat rozwiązywania równań i układów równań kongruencyjnych w oparciu o chińskie twierdzenie o resztach, test pierwszości oparty o małe twierdzenie Fermata, algorytmy teorii grafów. W wielu wypadkach poprawnie rozpoznaje praktyczne problemy, w których mają one zastosowanie.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

|                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 3.5        | Student spełnia kryteria na ocenę 3 oraz w większości wypadków potrafi wskazać twierdzenia, na których opiera się poprawność tych algorytmów.                                                                                                                                                                                               |
| NA OCENĘ 4.0        | Student spełnia kryteria na ocenę 3.5, potrafi stosować algorytm RSA i potrafi wykazać poprawność niektórych algorytmów.                                                                                                                                                                                                                    |
| NA OCENĘ 4.5        | Student umie stosować wszystkie poznane algorytmy, umie udowodnić poprawność większości z nich i poprawnie rozpoznaje praktyczne problemy, w których mają one zastosowanie.                                                                                                                                                                 |
| NA OCENĘ 5.0        | Student umie stosować wszystkie poznane algorytmy, umie udowodnić ich poprawność i poprawnie rozpoznaje praktyczne problemy, w których mają one zastosowanie.                                                                                                                                                                               |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 3 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną.                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| NA OCENĘ 3.0        | Student potrafi poprawnie wypowiedzieć większość definicji i niektóre twierdzenia, być może odwołując się do intuicji. Po zwróceniu uwagi, potrafi doprecyzować swoją wypowiedź.                                                                                                                                                            |
| NA OCENĘ 3.5        | Student potrafi poprawnie wypowiedzieć prawie wszystkie definicje i większość twierdzeń, a niektóre z nich udowodnić. Po zwróceniu uwagi, potrafi doprecyzować swoją wypowiedź. W rozwiązaniach zadań poprawnie odwołuje się do znanych twierdzeń. Odróżnia hipotezę od udowodnionego faktu. Nie myli twierdzenia z twierdzeniem odwrotnym. |
| NA OCENĘ 4.0        | Student spełnia kryteria na ocenę 3.5. Jasno formułuje pytania. Zna granice swojej wiedzy: nie podaje hipotez za fakty. Jego rozumowania są jasne, poprawne, być może z pewnymi usterkami.                                                                                                                                                  |
| NA OCENĘ 4.5        | Student spełnia kryteria na ocenę 4. Przedstawiane przez niego rozumowania są ścisłe, klarowne i na ogół bezusterkowe.                                                                                                                                                                                                                      |
| NA OCENĘ 5.0        | Student spełnia wymagania na ocenę 4.5. Umie komunikować swoją wiedzę płynnie, jasno i ciekawie. Przedstawiane rozumowania są poprawne. Gdy zostanie zapytany, student potrafi wytłumaczyć wszystkie szczegóły. Potrafi zastosować poznane sposoby rozumowania do innych sytuacji.                                                          |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 4 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną.                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| NA OCENĘ 3.0        | Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć niektóre pojęcia matematyki dyskretnej. Szanuje cudzą własność intelektualną.                                                                                                                                                                      |
| NA OCENĘ 3.5        | Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć niektóre pojęcia matematyki dyskretnej. Zna praktyczne zastosowania niektórych zagadnień. Szanuje cudzą własność intelektualną.                                                                                                                    |

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 4.0 | Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć wiele pojęć i faktów z matematyki dyskretnej. Zna praktyczne zastosowania większości zagadnień. Bierze udział w dyskusji, starając się jasno przekazać własne propozycje rozwiązań. Szanuje innych uczestników dyskusji. Szanuje cudzą własność intelektualną.                                                                                                                                 |
| NA OCENĘ 4.5 | Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć większość pojęć i faktów z matematyki dyskretnej oraz wagę ich precyzyjnego sformułowania. Zna praktyczne zastosowania prawie wszystkich omawianych zagadnień. Bierze udział w dyskusji, starając się jasno przekazać własne propozycje rozwiązań. Szanuje innych uczestników dyskusji. Szanuje cudzą własność intelektualną.                                                                  |
| NA OCENĘ 5.0 | Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć pojęcia, fakty i metody matematyki dyskretnej. Potrafi wytłumaczyć znaczenie precyzyjnego sformułowania pojęć i zagadnień dla praktycznych zastosowań matematyki dyskretnej. Chętnie bierze udział w dyskusji, szanując innych jej uczestników. Często proponuje trafne rozwiązania omawianych problemów i stara się je przedstawić jasno i precyzyjnie. Szanuje cudzą własność intelektualną. |

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU            | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE                         | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY           |
|-------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------------------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| EK1               | K_W02,<br>K_W03,<br>K_W04,<br>K_W05,<br>K_W06,<br>K_U01, K_U02,<br>K_U03, K_U04,<br>K_U17 | Cel 1           | W1 W2 W3 W4<br>W5 C1 C2 C3<br>C5 C6 C7    | N1 N2 N3 N4           | F1 F2 F3 F4 P1<br>P2 P3 |
| EK2               | K_W01,<br>K_U11, K_U25,<br>K_U29                                                          | Cel 2           | W2 W3 W5 C2<br>C4 C7                      | N1 N2 N3 N4 N5        | F1 F2 F3 F4 P1<br>P2 P3 |
| EK3               | K_W01,<br>K_W02,<br>K_U01, K_U36,<br>K_K05, K_K07                                         | Cel 1 Cel 3     | W1 W2 W3 W4<br>W5 C1 C2 C3<br>C4 C5 C6 C7 | N1 N2 N3 N4           | F2 F3 F4 P1 P2<br>P3    |

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE                   | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY           |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------------------------------------|-----------------------|-------------------------|
| EK4               | K_K01, K_K02, K_K04, K_K05, K_K07                                              | Cel 3           | W1 W2 W3 W4<br>W5 C1 C2 C3<br>C5 C6 | N1 N2 N3 N4           | F1 F2 F3 F4 P1<br>P2 P3 |

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

[1] | Kenneth A. Ross, Charles R.B. Wright — *Matematyka dyskretna*, Warszawa, 2002, PWN

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

[1] | R.Wilson — *Wprowadzenie do teorii grafów*, Warszawa, 1999, PWN

[2] | M. Goodaire, M. Parementer — *Discrete Mathematics with Graph Theory*, New York, 2000, Prentice Hall

[3] | N. Biggs — *Discrete Mathematics*, Oxford, 2002, Oxford University Press

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Katarzyna Pałasińska (kontakt: kpalasin@pk.edu.pl)

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr Grzegorz Gancarzewicz (kontakt: gancarz@simplusnet.pl)

2 dr Katarzyna Pałasińska (kontakt: kpalasin@pk.edu.pl)

3 dr Szymon Pilś (kontakt: splis@pk.edu.pl)

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

(miejscowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....  
.....  
.....