

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2012/2013

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: niestacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Modelowanie matematyczne

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Analiza matematyczna II
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	
KOD PRZEDMIOTU	WFMiI M oIN B7 12/13
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty podstawowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	10.00
SEMESTRY	3

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
3	36	36	0	0	0	0

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Wykorzystanie rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych do wyznaczania ekstremów lokalnych, badania istnienia i własności funkcji uwikłanej oraz wyznaczania ekstremów warunkowych.

**Cel 2** Zapoznanie studentów z podstawowymi faktami dotyczącymi całki oznaczonej i całek niewłaściwych. Wielokrotna całka Riemanna

Cel 3 Elementy analizy fourierowskiej

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Zaliczenie Analizy Matematycznej I

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student zna podstawowe twierdzenia i metody rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych ze szczególnym uwzględnieniem takich pojęć jak: funkcja uwikłana, ekstrema lokalne, globalne, warunkowe.

**EK2 Umiejętności** Student umie zastosować twierdzenia i metody rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych w zagadnieniach związanych z optymalizacją, poszukiwaniem ekstremów lokalnych i globalnych podając precyzyjne i ściśle uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.

**EK3 Wiedza** Student zna podstawowe fakty z rachunku całkowego funkcji jednej zmiennej rzeczywistej. Student zna podstawowe fakty z rachunku całkowego funkcji wielu zmiennych.

**EK4 Umiejętności** Student posługuje się definicją całki oznaczonej oraz niewłaściwej funkcji jednej zmiennej jak również całki funkcji wielu zmiennych, potrafi wyjaśnić analityczny i geometryczny sens tych pojęć.

**EK5 Wiedza** Student zna podstawowe fakty analizy fourierowskiej.

**EK6 Umiejętności** Student potrafi zastosować podstawowe fakty analizy fourierowskiej.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
W1	Pochodna (różniczka) odwzorowania z przestrzeni Banacha do przestrzeni Banacha, pochodne kierunkowe i pochodne cząstkowe, postać macierzowa pochodnej (przypomnienie).	3
W2	Różniczkowanie funkcji złożonej i odwrotnej, odwzorowania regularne i dyfeomorfizmy, twierdzenie o lokalnym dyfeomorfizmie.	2
W3	Pochodna rzędu $n$ funkcji wielu zmiennych rzeczywistych o wartościach rzeczywistych, funkcje klasy $C_n$ , twierdzenie Taylora.	2
W4	Ekstrema funkcji wielu zmiennych, warunek konieczny oraz warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego.	2
W5	Twierdzenie o funkcji uwikłanej (różne przypadki), równanie stycznej do krzywej danej równaniem uwikłanym, druga pochodna funkcji uwikłanej, ekstrema lokalne funkcji uwikłanej.	3
W6	Ekstrema warunkowe	3
W7	Powierzchnie stopnia drugiego	1

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W8</b>	Definicja całki Cauchyego, Darboux, całka oznaczona Riemanna. Warunek konieczny i wystarczający całkowalności w sensie Riemanna, własności całki Riemanna, metody całkowania dla całki oznaczonej.	3
<b>W9</b>	Zastosowanie całki oznaczonej - pole trapezu krzywoliniowego, długość krzywej, objętość bryły obrotowej, pole powierzchni bocznej bryły obrotowej, całki niewłaściwe I i II rodzaju.	3
<b>W10</b>	Definicja całki Riemanna po przedziale (wielowymiarowym), sumy całkowite górna i dolna, warunek konieczny i wystarczający na całkowalność.	2
<b>W11</b>	Twierdzenie o całkowalności funkcji ciągłej, przestrzeń funkcji całkowalnych w sensie Riemanna $R(P)$ , twierdzenie Fubinię dla całki Riemanna.	3
<b>W12</b>	Całka wielokrotna po dowolnym zbiorze, interpretacja całki podwójnej, całkowanie po zbiorach normalnych, interpretacja całki potrójnej, twierdzenie o zmianie zmiennych, współrzędne biegunowe, współrzędne sferyczne, całka we współrzędnych biegunowych.	3
<b>W13</b>	Współrzędne biegunowe, współrzędne sferyczne, całka we współrzędnych biegunowych, całka we współrzędnych sferycznych.	2
<b>W14</b>	Całka jako funkcja parametrów.	2
<b>W15</b>	Geometria przestrzeni Hilberta, metoda ortogonalizacji, szereg Fouriera.	1
<b>W16</b>	Nierówność Bessela, równość Parsewala, szereg trygonometryczny Fouriera.	1

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>C1</b>	Wyznaczanie pochodnej odwzorowania z przestrzeni Banacha do przestrzeni Banacha, pochodnej kierunkowej i pochodnych cząstkowych, postaci macierzowej pochodnej (przypomnienie).	3
<b>C2</b>	Obliczanie pochodnych pierwszego rzędu odwzorowań z $R_n$ do $R_m$ , wykorzystanie twierdzeń o różniczkowaniu funkcji, różniczkowanie funkcji złożonej i odwrotnej, sprawdzanie czy dane odwzorowanie jest regularne, dyfeomorfizmem, zastosowanie twierdzenia o lokalnym dyfeomorfizmie.	2
<b>C3</b>	Obliczanie pochodnych wyższych rzędów funkcji wielu zmiennych rzeczywistych o wartościach rzeczywistych, sprawdzanie przynależności funkcji do klasy $C_n$ , wyznaczanie gradientu funkcji, wykorzystanie twierdzenia Taylora, obliczenia przybliżone z wykorzystaniem wzoru Taylora dla funkcji wielu zmiennych.	2
<b>C4</b>	Wyznaczanie ekstremów funkcji wielu zmiennych, zastosowanie twierdzenia Sylwestera, dodatniość a dodatnia określoność pochodnej drugiego rzędu	2

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C5	Zastosowanie twierdzenia o funkcji uwikłanej (różne przypadki), wyznaczenie stycznej do krzywej danej równaniem uwikłanym, obliczanie pierwszej, drugiej pochodnej funkcji uwikłanej, wyznaczenie ekstremów funkcji uwikłanych.	3
C6	Wyznaczanie ekstremów warunkowych.	3
C7	Powierzchnie stopnia drugiego	1
C8	Obliczanie całek oznaczonych Riemanna z definicji oraz przy użyciu całki Cauchyego, wykorzystanie sum całkowych Riemanna do wyznaczania sum szeregów, obliczanie całek Darboux, wykorzystanie własności całki Riemanna, ćwiczenie metod całkowania dla całki Riemanna, wykorzystanie geometrycznej interpretacji całki funkcji nieujemnej.	3
C9	Obliczanie długości łuku, pola obszaru, objętości i pola powierzchni bryły obrotowej.	3
C10	Wyznaczanie całek niewłaściwych I rodzaju i II rodzaju, zastosowanie kryterium całkowego do badania zbieżności szeregu, kryteria Abela i Dirichleta.	2
C11	Zastosowanie domkniętości i zupełności przestrzeni $R(P)$ , zastosowanie twierdzenia Fubiniego dla całki Riemanna.	2
C12	Wyznaczanie całki wielokrotnej po dowolnym zbiorze, wykorzystanie interpretacji całki podwójnej, potrójnej.	3
C13	Całkowanie z wykorzystaniem twierdzenia o zmianie zmiennych.	3
C14	Badanie ciągłości i różniczkowalności całki jako funkcji parametrów.	2
C15	Przypomnienie definicji iloczynu skalarnego, przestrzeni unitarnej, przestrzeni Hilberta, metody ortonormalizacji, badanie zupełności układu, sprawdzanie ortogonalności elementów przestrzeni unitarnej, badanie ortogonalności podprzestrzeni, wyznaczanie współczynników Fouriera, rozwijanie w szereg trygonometryczny Fouriera, sprawdzanie warunków Dirichleta, zastosowanie poznanej teorii do wyznaczania sum szeregów.	2

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady

N2 Konsultacje

N3 Zadania tablicowe

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
<b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>	
Godziny wynikające z planu studiów	0
Konsultacje przedmiotowe	20
Egzaminy i zaliczenia w sesji	10
<b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b>	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	198
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
<b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>	<b>228</b>
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	10.00

## 9 SPOSOBY OCENY

Obok obowiązkowej obecności warunkiem otrzymania zaliczenia z ćwiczeń jest uzyskanie co najmniej 50

### OCENA FORMUJĄCA

F1 Kolokwium

F2 Odpowiedź ustna

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

P1 Egzamin pisemny

P2 Egzamin ustny

P3 Średnia ważona ocen formujących

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

W1 Do egzaminu mogą przystąpić studenci, którzy otrzymali zaliczenie z ćwiczeń.

W2 Egzamin składa się z części pisemnej i części ustnej.

W3 Ocena końcowa jest średnią arytmetyczną ocen P1, P2, P3.

**KRYTERIA OCENY**

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.5	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału i umie zilustrować je przykładami.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia i podawać przykłady ich zastosowania.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia i podawać przykłady oraz idee dowodów.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia i podawać przykłady oraz pełne dowody.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 2.0	Student nie dostrzega możliwości wykorzystania podstawowych pojęć z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi w dostatecznym stopniu wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału i umie je uzasadnić.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne i ściśle uzasadnione uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi bezbłędnie, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne i ściśle uzasadnione uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.5	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału i umie zilustrować je przykładami.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia i podawać przykłady ich zastosowania.

NA OCENĘ 4.5	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia i podawać przykłady oraz idee dowodów.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia i podawać przykłady oraz pełne dowody.
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 2.0	Student nie dostrzega możliwości wykorzystania podstawowych pojęć z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi w dostatecznym stopniu wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału i umie je uzasadnić.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne i ściśle uzasadnione uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi bezbłędnie, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne i ściśle uzasadnione uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.
EFEKT KSZTAŁCENIA 5	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.5	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału i umie zilustrować je przykładami.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia i podawać przykłady ich zastosowania.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia i podawać przykłady oraz idee dowodów.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia i podawać przykłady oraz pełne dowody.
EFEKT KSZTAŁCENIA 6	
NA OCENĘ 2.0	Student nie dostrzega możliwości wykorzystania podstawowych pojęć z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi w dostatecznym stopniu wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.

NA OCENĘ 3.5	Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału i umie je uzasadnić.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne i ściśle uzasadnione uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi bezbłędnie, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne i ściśle uzasadnione uzasadnienia poprawności swoich rozumowań.

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W01, K_W02, K_W03, K_W04, K_W05, K_W07, K_K01, K_K02, K_K05, K_K07	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7	N1 N2 N3	P1 P2
EK2	K_U01, K_U02, K_U03, K_U05, K_U06, K_U09, K_U10, K_U11, K_U12, K_U15, K_U36, K_K01, K_K02, K_K05, K_K07	Cel 1	W2 W3 W4 W5 W6 W7 C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7	N2 N3	F1 F2 P3
EK3	K_W01, K_W02, K_W03, K_W04, K_W05, K_W07, K_K01, K_K02, K_K05, K_K07	Cel 2	W8 W9 W10 W11 W12 W13 W14 C8 C9 C10 C11 C12 C13 C14	N1 N2 N3	P1 P2



EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK4	K_U01, K_U02, K_U03, K_U05, K_U06, K_U09, K_U10, K_U11, K_U13, K_U14, K_U15, K_U36, K_K01, K_K02, K_K05, K_K07	Cel 2	W8 W9 W10 W11 W12 W13 W14 C8 C9 C10 C11 C12 C13 C14	N2 N3	F1 F2 P3
EK5	K_W01, K_W02, K_W03, K_W04, K_W05, K_W07, K_K01, K_K02, K_K05, K_K07	Cel 3	W15 W16 C15	N1 N2 N3	P1 P2
EK6	K_W01, K_W02, K_W03, K_W05, K_W06, K_U09, K_U10, K_U11, K_U13, K_U14, K_U15, K_U36, K_K01, K_K02, K_K05, K_K07	Cel 3	W15 W16 C15	N2 N3	F1 F2 P3

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1 ] T. Winiarska, T. Winiarski — *Wykłady z Analizy Matematycznej*, Kraków, 2010, Wyd. PK
- [2 ] W. Kołodziej — *Analiza Matematyczna*, Warszawa, 1983, PWN
- [3 ] W. Rudin — *Podstawy Analizy Matematycznej*, Warszawa, 1969, PWN
- [4 ] W. Stankiewicz — *Zadania z Matematyki dla Wyższych Uczelni Technicznych*, Warszawa, 1983, PWN
- [5 ] B. Demidowicz — *Zbiór Zadań z Analizy Matematycznej*, Lublin, 1992, Naukowa Książka
- [6 ] J. Banaś, S. Wędrychowicz — *Zbiór Zadań z Analizy Matematycznej*, Warszawa, 2001, WNT

**LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA**

- [1 ] **J. Dieudonne** — *Foundations of Modern Analysis*, New York and London, 1960, Academic Press
- [2 ] **L. M. Drużkowski** — *Analiza Matematyczna. Podstawy*, Kraków, 1998, Wyd. UJ
- [3 ] **W. Kaczor, M. Nowak** — *Zadania z Analizy Matematycznej*, Warszawa, 2005, PWN

**12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH****OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ**

dr Mariusz Jużyniec (kontakt: [juzyniec@pk.edu.pl](mailto:juzyniec@pk.edu.pl))

**13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI**

---

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)