

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2012/2013

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: niestacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Matematyka w finansach i ekonomii

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Teoria miary
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	
KOD PRZEDMIOTU	WFMiI M oIN C1 12/13
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty kierunkowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	4.00
SEMESTRY	6

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
6	18	18	0	0	0	0

### 3 CELE PRZEDMIOTU

Cel 1 Zapoznanie z podstawowymi pojęciami teorii miary ze szczególnym naciskiem na teorię miary Lebesguea

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

- 1 Znajomość materiału na poziomie koniecznym do zaliczenia przedmiotów: Wstęp do logiki i teorii mnogości, Wstęp do topologii, Analiza matematyczna I.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student zna podstawowych pojęcia teorii miary i ich własności.

**EK2 Umiejętności** Student umie zbadać mierzalność zbiorów i funkcji (rzeczywistych); rozróżnia różne typy zbieżności ciągów funkcji (rzeczywistych) określonych na przestrzeni z miarą i umie je przeanalizować.

**EK3 Umiejętności** Student umie rozpoznać i wykazać najważniejsze własności topologiczne podzbiorów przestrzeni euklidesowej związane z miarą.

**EK4 Kompetencje społeczne** Student wykazuje się umiejętnością precyzyjnego formułowania pytań służących pogłębieniu rozumienia danego problemu oraz odnajdywania brakujących elementów rozumowania.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W1</b>	Pierścień zbiorów, sigma-pierścień zbiorów, ciało zbiorów, sigma-ciało zbiorów, rodziny monotoniczne, zbiory borelowskie	3
<b>W2</b>	zawartość przedziału, miara zewnętrzna (w przestrzeni $R_n$ ) i jej własności definicja zbioru mierzalnego, sigma-ciało zbiorów mierzalnych miara Lebesgue'a	4
<b>W3</b>	miara zewnętrzna (na dowolnym zbiorze potęgowym) warunek Caratheodory'ego własności rodziny zbiorów spełniających warunek Caratheodory'ego związek ze zbiorami mierzalnymi przestrzeni $R_n$	4
<b>W4</b>	Aksjomat wyboru i niemierzalne podzbiory prostej rzeczywistej	2
<b>W5</b>	funkcje mierzalne zbieżność według miary	5

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>C1</b>	Pierścień zbiorów, sigma-pierścień zbiorów, ciało zbiorów, sigma-ciało zbiorów, rodziny monotoniczne, zbiory borelowskie	3
<b>C2</b>	zawartość przedziału, miara zewnętrzna (w przestrzeni $R_n$ ) i jej własności sigma-ciało zbiorów mierzalnych	3
<b>C3</b>	własności topologiczne i mierzalność podzbiorów prostej i przestrzeni $R_n$	5

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C4	funkcje mierzalne zbieżność według miary	7

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady

N2 Ćwiczenia audytoryjne

N3 e-learning (platforma Moodle)

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
<b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>	
Godziny wynikające z planu studiów	0
Konsultacje przedmiotowe	10
Egzaminy i zaliczenia w sesji	10
<b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b>	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	39
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
przygotowania odpowiedzi zadań zamieszczonych na platformie e-learningowej	25
<b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>	<b>84</b>
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	4.00

## 9 SPOSOBY OCENY

OCENA FORMUJĄCA

F1 Kolokwium

F2 Odpowiedź ustna

F3 Test

**OCENA PODSUMOWUJĄCA**
**P1** Zaliczenie ustne

**P2** Średnia ważona ocen formujących

**OCENA AKTYWNOŚCI BEZ UDZIAŁU NAUCZYCIELA**
**B1** Inne

**KRYTERIA OCENY**

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia teorii miary (sigma-ciało, miara, przestrzeń z miarą, zawartość n-wymiarowego przedziału); zna konstrukcję miary Lebesgue'a; zna definicję funkcji mierzalnej.
NA OCENĘ 3.5	Student zna podstawowe pojęcia teorii miary (sigma-ciało, miara, miara zewnętrzna, zawartość n-wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a); zna definicję funkcji mierzalnej.
NA OCENĘ 4.0	Student zna podstawowe pojęcia teorii miary (sigma-ciało, miara, miara zewnętrzna, zawartość n-wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a) i potrafi ją zaprezentować; student potrafi przedstawić konstrukcję zbioru niemierzalnego na prostej (przy założeniu aksjomatu wyboru); zna definicję i podstawowe własności funkcji mierzalnych.
NA OCENĘ 4.5	Student zna podstawowe struktury algebraiczne związane z podstawami teorii miary (sigma-pierścień, sigma-ciało, klasa mnotoniczna); student zna podstawowe pojęcia teorii miary (miara, miara zewnętrzna, zawartość n-wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a) i potrafi ją zaprezentować; student potrafi przedstawić konstrukcję zbioru niemierzalnego na prostej (przy założeniu aksjomatu wyboru); student zna definicję funkcji mierzalnej i podstawowe własności klasy funkcji mierzalnych; student zna zależności pomiędzy funkcją ciągłą i mierzalną.
NA OCENĘ 5.0	Student zna podstawowe struktury algebraiczne związane z podstawami teorii miary (sigma-pierścień, sigma-ciało, klasa mnotoniczna) i zależności pomiędzy nimi; student zna podstawowe pojęcia teorii miary (miara, miara zewnętrzna, zawartość n-wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a) i potrafi ją zaprezentować; student potrafi przedstawić konstrukcję zbioru niemierzalnego na prostej (przy założeniu aksjomatu wyboru); student zna definicję funkcji mierzalnej i podstawowe własności klasy funkcji mierzalnych; student zna zależności pomiędzy funkcją ciągłą i mierzalną; student potrafi przedstawić przykłady funkcji niemierzalnych.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	

NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów,, przedziałów $n$ -wymiarowych (w $n$ -wymiarowym produkcie prostej) ich przeliczalnych sum i przecięć; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności funkcji w nieskomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność wynika wprost z odpowiednich twierdzeń); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych; zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami a zbieżnością według miary.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów,, przedziałów $n$ -wymiarowych (w $n$ -wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności funkcji w nieskomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność łatwo można wydedukować z odpowiednich twierdzeń); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary (w prostych rachunkowo przypadkach); zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami .
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów $n$ -wymiarowych (w $n$ -wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w oparciu o poznane twierdzenia mierzalność podzbiorów $n$ -wymiarowego produktu prostej rzeczywistej; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności funkcji w nieskomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność nie wymaga szczególnie skomplikowanych uzasadnień); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary (w prostych rachunkowo przypadkach); zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami .
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów $n$ -wymiarowych (w $n$ -wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w oparciu o poznane twierdzenia mierzalność podzbiorów $n$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności (lub niemierzalności) funkcji w bardziej skomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, granice ciągów funkcji mierzalnych, złożenia funkcji ciągłych i mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność nie wymaga szczególnie skomplikowanych uzasadnień); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary; zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami i potrafi je wykorzystać .

NA OCENĘ 5.0	<p>Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów <math>n</math>-wymiarowych (w <math>n</math>-wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w oparciu o poznane twierdzenia mierzalność podzbiorów <math>n</math>-wymiarowej przestrzeni euklidesowej; Student potrafi twórczo wykorzystać zbiór niemierzalny do badania mierzalności innych zbiorów lub mierzalności funkcji; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności (lub niemierzalności) funkcji w skomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, granice ciągów funkcji mierzalnych, złożenia funkcji ciągłych i mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność wymaga dość skomplikowanych uzasadnień); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary; zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami i potrafi je wykorzystać .</p>
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć w prostych przypadkach, czy dany podzbiór $n$ -wymiarowego produktu prostej jest typu F-sigma lub G-delta.
NA OCENĘ 3.5	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w prostych przypadkach, czy dany podzbiór $n$ -wymiarowego produktu prostej jest F-sigma lub G-delta.
NA OCENĘ 4.0	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić, czy dany podzbiór $n$ -wymiarowego produktu prostej lub wybranych podprzestrzeni funkcji (ciągłych) rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest borelowski. Student potrafi wykorzystać tę wiedzę przy badaniu mierzalności zbiorów i funkcji.
NA OCENĘ 4.5	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić, czy dany podzbiór $n$ -wymiarowego produktu prostej lub wybranych podprzestrzeni funkcji (ciągłych) rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest borelowski. Student potrafi wykorzystać tę wiedzę przy badaniu mierzalności zbiorów i funkcji.
NA OCENĘ 5.0	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić, czy dany podzbiór $n$ -wymiarowego produktu prostej lub wybranych podprzestrzeni funkcji (ciągłych) rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest borelowski i wskazać jego miejsce w hierarchii zbiorów borelowskich. Student potrafi wykorzystać tę wiedzę przy badaniu mierzalności zbiorów i funkcji.
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu).
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane.

NA OCENĘ 4.0	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane. Student potrafi przeanalizować definicję nowego pojęcia i skonstruować przykład definiowanego pojęcia. Student potrafi wydobyć z treści zadania, co powinien udowodnić.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane. Student potrafi przeanalizować definicję nowego pojęcia i skonstruować przykład definiowanego pojęcia. Student potrafi analizować w oparciu o definicje i poznane twierdzenia zależności pomiędzy pojęciami. Student potrafi wydobyć z treści zadania, co powinien udowodnić a następnie skazać poznane twierdzenia, które będą przydatne w dowodzie.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane. Student potrafi przeanalizować definicję nowego pojęcia i skonstruować przykład definiowanego pojęcia. Student potrafi analizować w oparciu o definicje i poznane twierdzenia zależności pomiędzy pojęciami i wskazywać nierozstrzygnięte (na anym etapie poznawania teorii) pytania. Student potrafi wydobyć z treści zadania, co powinien udowodnić a następnie skazać poznane twierdzenia, które będą przydatne w dowodzie i sformułować dowód.

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W01, K_W02, K_W03, K_W04, K_U01, K_U02, K_U05, K_U10, K_U12, K_U16, K_U22, K_U23, K_K01, K_K02, K_K05, K_K07	Cel 1	W1 W3 W4 W5 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓLOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK2	K_W01, K_W02, K_W03, K_W04, K_U01, K_U02, K_U05, K_U10, K_U12, K_U16, K_U22, K_U23, K_K01, K_K05, K_K07	Cel 1	W2 W3 W4 W5 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2
EK3	K_W01, K_W02, K_W03, K_W04, K_U01, K_U02, K_U05, K_U10, K_U12, K_U16, K_U22, K_U23, K_K01, K_K02, K_K05, K_K07	Cel 1	W1 W2 C1 C2 C3	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2
EK4	K_W01, K_W02, K_W03, K_W04, K_U01, K_U02, K_U05, K_U10, K_U12, K_U16, K_U22, K_U23, K_U36, K_K01, K_K02, K_K05, K_K07	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

[1 ] W. Kołodziej — *Analiza matematyczna*, Warszawa, 2008, PWN

[2 ] S. Łojasiewicz — *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Warszawa, 1973, PWN

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

[1 ] F. M. Filipczak — *Teoria miary i całki*, Łódź, 1997, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego



- [2 ] **P. R. Halmos** — *Measure theory*, New York-Heidelberg-Berlin, 1973, Springer-Verlag
- [3 ] **J.C. Oxtoby** — *Measure and Category*, New York-Heidelberg-Berlin, 1980, Springer-Verlag
- [4 ] **D.H. Fremlin** — *Measure Theory (tom 1 Irreducible Minimum)*, England, 2000, Torres Fremlin

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Magdalena Grzech (kontakt: magdag@pk.edu.pl)

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr Magdalena Grzech (kontakt: smgrzech@cyf-kr.edu.pl)

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

**PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI** (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....