

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2012/2013

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Matematyka w finansach i ekonomii

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Matematyka dyskretna
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	
KOD PRZEDMIOTU	WFMiI M oIS B10 12/13
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty podstawowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	6.00
SEMESTRY	3

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
3	30	30	0	0	0	0

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Zapoznanie studenta z podstawowymi pojęciami i metodami matematyki dyskretnej.

**Cel 2** Umiejętność rozpoznania wśród problemów praktycznych takich, do których można zastosować metody matematyki dyskretnej. Rozwiązywanie niektórych takich problemów.

**Cel 3** Rozwijanie umiejętności komunikacji.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

- 1 Zaliczony przedmiot Wstęp do logiki i teorii mnogości.
- 2 Dobra znajomość metody indukcji matematycznej.
- 3 Znajomość algebry w zakresie podstaw teorii grup i podstaw teorii pierścieni.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student zna podstawowe definicje i twierdzenia przedstawione na wykładach.

**EK2 Wiedza** Student zna aksjomaty teorii liczb.

**EK3 Wiedza** Student umie wypowiedzieć algorytm RSA i uzasadnić jego poprawność na gruncie poznanych twierdzeń z teorii liczb.

**EK4 Umiejętności** Student umie stosować poznane algorytmy.

**EK5 Umiejętności** Student umie komunikować swoją wiedzę, przedstawić klarownie i ściśle rozumowania matematyczne, zarówno w formie pisemnej jak i ustnej. Umie jasno sformułować pytanie.

**EK6 Kompetencje społeczne** Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom. Odpowiedzialnie traktuje swoje wypowiedzi: odróżnia przypuszczenia od faktów potwierdzonych. Szanuje sądy innych i odnosi się do nich merytorycznie. Jest etyczny: szanuje cudzą własność intelektualną.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W1</b>	Aksjomaty liczb całkowitych. Zasada minimum i jej równoważność z zasadą indukcji matematycznej.	1
<b>W2</b>	Podzielność. NWD i NWW. Algorytm Euklidesa. Reprezentacja liczb całkowitych w systemach o różnych podstawach.	2
<b>W3</b>	Liczby pierwsze. Twierdzenie, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Sito Eratostenesa. Liczby pierwsze merseńskie i liczby pierwsze Fermata. Pytania otwarte dotyczące liczb pierwszych. Twierdzenie aproksymujące rozmieszczenie liczb pierwszych, bez dowodu.	4
<b>W4</b>	Przystawanie liczb modulo $n$ jako relacja kongruencji. Struktura ilorazowa. Chińskie twierdzenie o resztach. Rozwiązywanie równań i układów równań kongruencyjnych. Małe twierdzenie Fermata. Informacja o wielkim twierdzeniu Fermata.	4
<b>W5</b>	Zastosowania relacji przystawania modulo $n$ : kody ISBN, algorytm RSA. Poprawność tego algorytmu.	2
<b>W6</b>	Ciągi definiowane indukcyjnie. Ciąg Fibonacciego. Liniowe zależności rekurencyjne rzędu drugiego i ich rozwiązywanie metodą równania charakterystycznego i metodą funkcji tworzących. Przykłady zastosowań do problemów praktycznych.	4

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
W7	Zasady zliczania: wzór włącz-wyłącz, zasada iloczynu, zasada szufladkowa Dirichleta. Wariacje, permutacje, kombinacje, kombinacje z powtórzeniami, permutacje z powtórzeniami. Ilość sposobów rozmieszczenia w $k$ pudełkach $n$ przedmiotów (rozdzielalnych lub nie).	4
W8	Pojęcie grafu nieskierowanego. Podstawowe pojęcie: macierz grafu, spójność, trasa, ścieżka, droga, cykl. Kilka zastosowań teorii grafów.	2
W9	Algebry Boole a. Wyrażenia boole owskie. Sieci bramek logicznych. Upraszczenie wyrażeń boole owskich i sieci logicznych.	3
W10	Formalne systemy dedukcyjne. Definicje i przykłady. Dowodzenie twierdzeń w systemach dedukcyjnych. nieklasyczne logiki zdaniowe.	4

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C1	Ćwiczenia dotyczące stosowania zasady minimum i zasady indukcji.	2
C2	Znajdowanie NWD. Reprezentacja liczb całkowitych w systemach o różnych podstawach.	3
C3	Dowodzenie prostych faktów jako wniosków z algorytmu dzielenia lub z algorytmu Euklidesa.	2
C4	Przystawanie modulo $n$ , struktury $Z_n$ , równania kongruencyjne. Zastosowania. Układy równań kongruencyjnych. Zastosowania małego twierdzenia Fermata. Alternatywny dowód małego twierdzenia Fermata.	5
C5	Stosowanie algorytmu RSA na prostych przykładach. Inne zastosowania przystawania modulo $n$ . Inne sposoby kodowania danych.	2
C6	Zadania prowadzące do zdefiniowania rekurencyjnego pewnych ciągów. Rozwiązywanie zależności rekurencyjnych dwoma metodami poznanymi na wykładzie.	4
C7	Kombinatoryka i zliczanie obiektów kombinatorycznych.	3
C8	Ilustracja podstawowych pojęć z teorii grafów. Informacje uzyskiwane z macierzy grafu i jej potęg. Zagadnienia praktyczne modelowane przy pomocy grafów.	3
C9	Algebra Boole a: redukcja wyrażeń boole owskich. Proste sieci Boole owskie.	3
C10	Systemy dedukcyjne. Nieklasyczne rachunki zdaniowe.	3

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Dyskusja

N2 Konsultacje

N3 Wykłady

N4 Zadania tablicowe

N5 Praca w grupach

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
<b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>	
Godziny wynikające z planu studiów	0
Konsultacje przedmiotowe	8
Egzaminy i zaliczenia w sesji	7
<b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b>	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	75
Opracowanie wyników	20
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	10
<b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>	<b>120</b>
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	6.00

## 9 SPOSOBY OCENY

### OCENA FORMUJĄCA

F1 Ćwiczenie praktyczne

F2 Kolokwium

F3 Odpowiedź ustna

F4 Zadanie tablicowe

F5 Projekt indywidualny

F6 Projekt zespołowy

**OCENA PODSUMOWUJĄCA****P1** Średnia ważona ocen formujących**P2** Egzamin pisemny**P3** Egzamin ustny**WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU****W1** Aby zaliczyć przedmiot, należy uzyskać pozytywną ocenę z każdego efektu kształcenia.**W2** Wszystkie oceny podsumowujące muszą być pozytywne.**W3** W niektórych przypadkach prowadzący przedmiot zwalnia studenta z egzaminu pisemnego..**W4** Ocena końcowa jest średnią z trzech ocen podsumowujących. W przypadku wyniku pośredniego, zaokrąglany jest on w kierunku oceny P1.**OCENA AKTYWNOŚCI BEZ UDZIAŁU NAUCZYCIELA****B1** Ćwiczenie praktyczne**B2** Projekt indywidualny**B3** Referaty studenckie**B4** Projekt zespołowy**KRYTERIA OCENY**

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 2.0	Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną
NA OCENĘ 3.0	Student zna wszystkie spośród definicji następujących pojęć: liczba pierwsza, graf nieskierowany, macierz grafu, trasa, ścieżka, droga, cykl, podzielność, NWD, NWW, przystawanie modulo $n$ , ciąg Fibonacciego. Student umie wypowiedzieć poprawnie każde z następujących twierdzeń: zasada indukcji, zasada minimum, algorytm dzielenia, wzór włącz-wyłącz, zasadę Dirichleta, twierdzenia dotyczące zliczania permutacji i wariacji. Ponadto student potrafi wypowiedzieć niektóre inne definicje i twierdzenia, być może z niewielkimi usterkami. Potrafi przedstawić dowody niektórych nietrudnych twierdzeń.
NA OCENĘ 3.5	Student spełnia wymagania na ocenę dostateczną, przy czym lista definicji i twierdzeń obowiązkowych jest rozszerzona o następujące: reprezentacja liczb naturalnych w systemach o różnych podstawach, lemat uzasadniający poprawność sita Eratostenesa, twierdzenie, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele, małe twierdzenie Fermata, chińskie twierdzenie o resztach, struktura ilorazowa liczb całkowitych przy dzieleniu przez przystawanie modulo $n$ . Student nie myli twierdzenia z twierdzeniem odwrotnym ani tezy z założeniami. W swoich argumentacjach klarownie odróżnia to, co wiadomo, od tego co należy dowieść. Potrafi przedstawić poprawnie dowody większości nietrudnych twierdzeń.

NA OCENĘ 4.0	Student spełnia kryteria na ocenę 3.5, przy czym lista pojęć i twierdzeń obowiązkowych rozszerza się o: równoważność zasady indukcji i zasady minimum, pojęcie systemu dedukcyjnego, algebry Boole'a, liczby pierwsze merseńskie i liczby pierwsze Fermata, liniowe zależności rekurencyjne rzędu drugiego i metody ich rozwiązywania. Student umie przedstawić dowody większości poznanych twierdzeń, być może z niewielkimi usterkami.
NA OCENĘ 4.5	Student zna prawie wszystkie pojęcia podane na wykładzie i umie zilustrować je przykładami i kontrprzykładami. Student poprawnie wypowiada wszystkie twierdzenia. Potrafi przedstawić dowody prawie wszystkich poznanych twierdzeń. W przypadku zauważenia usterki, sam potrafi ją skorygować.
NA OCENĘ 5.0	Student zna wszystkie definicje i twierdzenia podane na wykładzie. Wypowiada je bezbłędnie, ilustrując przykładami. Zna dowody wszystkich twierdzeń z kursu. Jego wypowiedzi są płynne, precyzyjne i jasne.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 2.0	Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną
NA OCENĘ 3.0	Student umie wypowiedzieć niektóre aksjomaty, częściowo poprawnie i wie, że teoria liczb jest teorią aksjomatyczną.
NA OCENĘ 3.5	Student umie wypowiedzieć niektóre aksjomaty, poprawnie lub z niewielkimi usterkami.
NA OCENĘ 4.0	Student umie wypowiedzieć większość aksjomatów, poprawnie lub z niewielkimi usterkami
NA OCENĘ 4.5	Student umie poprawnie wypowiedzieć wszystkie aksjomaty, stosuje je i w większości wypadków wie, w których miejscach w dowodach są one wykorzystywane.
NA OCENĘ 5.0	Student umie wypowiedzieć poprawnie wszystkie aksjomaty, zilustrować je i stosować. Wie, w których dowodach i w których miejscach są one stosowane.
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną
NA OCENĘ 3.0	Student umie wyjaśnić różnicę między tradycyjnym kodowaniem z użyciem klucza tajnego, a kodowaniem z kluczem publicznym. Wie, do której kategorii zalicza się metoda RSA. Umie przedstawić kolejne etapy kodowania przy użyciu tej metody, być może z niewielkimi usterkami.
NA OCENĘ 3.5	Student umie zdefiniować kodowanie i rozkodowanie jako funkcje o specjalnych własnościach; umie podać ich dziedziny. Umie przedstawić w pełni poprawnie kolejne kroki algorytmu RSA; wskazując, które z używanych danych są jawne. Na tej podstawie umie wyjaśnić zdanie, że RSA dostarcza metody kodowania z kluczem publicznym.
NA OCENĘ 4.0	Student spełnia kryteria na ocenę 3.5 i ponadto potrafi poprawnie podać procedurę odkodującą wiadomość. Pobieźnie uzasadnia jej poprawność, wskazując zastosowanie małego twierdzenia Fermata lub twierdzenia o resztach. Wypowiedź może zawierać niewielkie usterki.

NA OCENĘ 4.5	Student spełnia kryteria na ocenę 4. Potrafi poprawnie uzasadnić wykonalność i poprawność procedury kodowania i odkodowania powołując się na twierdzenia z teorii liczb. Wypowiedź może zawierać drobne usterki, ale gdy zostają one wskazane, student umie je skorygować.
NA OCENĘ 5.0	Student płynnie i bezusterkowo formułuje wypowiedź algorytmu i procedury odwrotnej, uzasadnia ich wykonalność i poprawność. Powołuje się poprawnie na twierdzenia z teorii liczb. Wskazuje elementy jawne i tajne procedury. Wyjaśnia na czym polega "publiczność" klucza w kodowaniu RSA.
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 2.0	Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną.
NA OCENĘ 3.0	Student umie stosować przynajmniej następujące poznane algorytmy: sito Eratostenesa, schemat rozwiązywania równań i układów równań kongruencyjnych w oparciu o chińskie twierdzenie o resztach, test pierwszości oparty o małe twierdzenie Fermata, algorytmy teorio-grafowe. W wielu wypadkach poprawnie rozpoznaje praktyczne problemy, w których mają one zastosowanie.
NA OCENĘ 3.5	Student spełnia kryteria na ocenę 3 oraz w większości wypadków potrafi wskazać twierdzenia, na których opiera się poprawność tych algorytmów.
NA OCENĘ 4.0	Student spełnia kryteria na ocenę 3.5, potrafi stosować algorytm RSA i potrafi wykazać poprawność niektórych algorytmów.
NA OCENĘ 4.5	Student umie stosować wszystkie poznane algorytmy, umie udowodnić poprawność większości z nich i poprawnie rozpoznaje praktyczne problemy, w których mają one zastosowanie.
NA OCENĘ 5.0	Student umie stosować wszystkie poznane algorytmy, umie udowodnić ich poprawność i poprawnie rozpoznaje praktyczne problemy, w których mają one zastosowanie.
EFEKT KSZTAŁCENIA 5	
NA OCENĘ 2.0	Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi poprawnie wypowiedzieć większość definicji i niektóre twierdzenia, być może odwołując się do intuicji. Po zwróceniu uwagi, potrafi doprecyzować swoją wypowiedź.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi poprawnie wypowiedzieć prawie wszystkie definicje i większość twierdzeń, a niektóre z nich udowodnić. Po zwróceniu uwagi, potrafi doprecyzować swoją wypowiedź. W rozwiązaniach zadań poprawnie odwołuje się do znanych twierdzeń. Odróżnia hipotezę od udowodnionego faktu. Nie myli twierdzenia z twierdzeniem odwrotnym.
NA OCENĘ 4.0	Student spełnia kryteria na ocenę 3.5. Jasno formułuje pytania. Zna granice swojej wiedzy: nie podaje hipotez za fakty. Jego rozumowania są jasne, poprawne, być może z pewnymi usterekami.
NA OCENĘ 4.5	Student spełnia kryteria na ocenę 4. Przedstawiane przez niego rozumowania są ściśle, klarowne i na ogół bezusterkowe.

NA OCENĘ 5.0	Student spełnia wymagania na ocenę 4.5. Umie komunikować swoją wiedzę płynnie, jasno i ciekawie. Przedstawiane rozumowania są poprawne. Gdy zostanie zapytany, student potrafi wytłumaczyć wszystkie szczegóły. Potrafi zastosować poznane sposoby rozumowania do innych sytuacji.
EFEKT KSZTAŁCENIA 6	
NA OCENĘ 2.0	Student nie spełnia kryteriów na ocenę dostateczną.
NA OCENĘ 3.0	Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć niektóre pojęcia matematyki dyskretnej. Szanuje cudzą własność intelektualną.
NA OCENĘ 3.5	Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć niektóre pojęcia matematyki dyskretnej. Zna praktyczne zastosowania niektórych zagadnień. Szanuje cudzą własność intelektualną.
NA OCENĘ 4.0	Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć wiele pojęć i faktów z matematyki dyskretnej. Zna praktyczne zastosowania większości zagadnień. Bierze udział w dyskusji, starając się jasno przekazać własne propozycje rozwiązań. Szanuje innych uczestników dyskusji. Szanuje cudzą własność intelektualną.
NA OCENĘ 4.5	Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć większość pojęć i faktów z matematyki dyskretnej oraz wagę ich precyzyjnego sformułowania. Zna praktyczne zastosowania prawie wszystkich omawianych zagadnień. Bierze udział w dyskusji, starając się jasno przekazać własne propozycje rozwiązań. Szanuje innych uczestników dyskusji. Szanuje cudzą własność intelektualną.
NA OCENĘ 5.0	Student rozumie potrzebę tłumaczenia matematyki laikom i potrafi przystępnie wytłumaczyć pojęcia, fakty i metody matematyki dyskretnej. Potrafi wytłumaczyć znaczenie precyzyjnego sformułowania pojęć i zagadnień dla praktycznych zastosowań matematyki dyskretnej. Chętnie bierze udział w dyskusji, szanując innych jej uczestników. Często proponuje trafne rozwiązania omawianych problemów i stara się je przedstawić jasno i precyzyjnie. Szanuje cudzą własność intelektualną.

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU



EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓLOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W02, K_W03, K_W04, K_W05, K_W06, K_U01, K_U02, K_U03, K_U04, K_U17	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W6 W7 W8 W9 W10 C1 C3 C4 C8 C9 C10	N1 N2 N3 N4	F1 F2 F3 F4 P1 P2 P3
EK2	K_W01, K_W03, K_W06, K_U01, K_U02, K_U03, K_U04, K_U17	Cel 1	W1 W2	N3 N4	F3 F4 P1 P3
EK3	K_W01, K_W04, K_U03, K_U11, K_U25, K_U29	Cel 1 Cel 2 Cel 3	W4 W5	N1 N2 N3 N4 N5	F1 F3 F4 P1 P2 P3
EK4	K_W01, K_U11, K_U25, K_U29	Cel 2	W2 W3 W4 W5 W6 C2 C4 C5 C6	N1 N2 N3 N4 N5	F1 F2 F3 F4 F5 F6 P1 P2 P3
EK5	K_W01, K_W02, K_U01, K_U36, K_K05, K_K07	Cel 3	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 C3 C4 C6 C7 C8 C9 C10	N1 N2 N3 N4	F2 F3 F4 P1 P2 P3
EK6	K_K01, K_K02, K_K04, K_K05, K_K07	Cel 3	W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W10 C3 C5 C6 C7 C8 C9 C10	N1 N2 N3 N4	F1 F2 F3 F4 P1 P2 P3

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

[1 ] Kenneth A. Ross, Charles R.B. Wright — *Matematyka dyskretna*, Warszawa, 2002, PWN

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

[1 ] R.Wilson — *Wprowadzenie do teorii grafów*, Warszawa, 1999, PWN

[2 ] M. Goodaire, M. Parementer — *Discrete Mathematics with Graph Theory*, New York, 2000, Prentice Hall

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Katarzyna Pałasińska (kontakt: kpalasin@pk.edu.pl)

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr Artur Piękosz (kontakt: pupiekos@cyf-kr.edu.pl)

2 dr Katarzyna Pałasińska (kontakt: kpalasin@pk.edu.pl)

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejscowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....

.....