

POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2012/2013

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Modelowanie matematyczne

1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Teoria miary
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	
KOD PRZEDMIOTU	WFMiI M oIS C1 12/13
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty kierunkowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	4.00
SEMESTRY	6

2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
6	30	30	0	0	0	0

3 CELE PRZEDMIOTU

Cel 1 Zapoznanie z podstawowymi pojęciami teorii miary ze szczególnym naciskiem na teorię miary Lebesguea

4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

- 1 Znajomość materiału na poziomie koniecznym do zaliczenia przedmiotów: Wstęp do logiki i teorii mnogości, Wstęp do topologii, Analiza matematyczna I.

5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

EK1 Wiedza Student zna podstawowych pojęcia teorii miary i ich własności.

EK2 Umiejętności Student umie zbadać mierzalność zbiorów i funkcji (rzeczywistych); rozróżnia różne typy zbieżności ciągów funkcji (rzeczywistych) określonych na przestrzeni z miarą i umie je przeanalizować.

EK3 Umiejętności Student umie rozpoznać i wykazać najważniejsze własności topologiczne podzbiorów przestrzeni euklidesowej związane z miarą.

EK4 Kompetencje społeczne Student wykazuje się umiejętnością precyzyjnego formułowania pytań służących pogłębieniu rozumienia danego problemu oraz odnajdywania brakujących elementów rozumowania.

6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
W1	Pierścień zbiorów, sigma-pierścień zbiorów, ciało zbiorów, sigma-ciało zbiorów, rodziny monotoniczne, zbiory borelowskie	6
W2	zawartość przedziału, miara zewnętrzna (w przestrzeni R_n) i jej własności definicja zbioru mierzalnego, sigma-ciało zbiorów mierzalnych miara Lebesgue'a	8
W3	miara zewnętrzna (na dowolnym zbiorze potęgowym) warunek Caratheodory'ego własności rodziny zbiorów spełniających warunek Caratheodory'ego związek ze zbiorami mierzalnymi przestrzeni R_n	8
W4	Aksjomat wyboru i niemierzalne podzbiory prostej rzeczywistej	2
W5	funkcje mierzalne zbieżność według miary	6

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C1	Pierścień zbiorów, sigma-pierścień zbiorów, ciało zbiorów, sigma-ciało zbiorów, rodziny monotoniczne, zbiory borelowskie	6
C2	zawartość przedziału, miara zewnętrzna (w przestrzeni R_n) i jej własności sigma-ciało zbiorów mierzalnych	6
C3	własności topologiczne i mierzalność podzbiorów prostej i przestrzeni R_n	10

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C4	funkcje mierzalne zbieżność według miary	8

7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady

N2 Ćwiczenia audytoryjne

N3 e-learning (platforma Moodle)

8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:	
Godziny wynikające z planu studiów	0
Konsultacje przedmiotowe	10
Egzaminy i zaliczenia w sesji	0
Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	25
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
przygotowania odpowiedzi zadań zamieszczonych na platformie e-learningowej	25
SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA	60
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	4.00

9 SPOSOBY OCENY

OCENA FORMUJĄCA

F1 Kolokwium

F2 Odpowiedź ustna

F3 Test

OCENA PODSUMOWUJĄCA
P1 Zaliczenie ustne

P2 Średnia ważona ocen formujących

OCENA AKTYWNOŚCI BEZ UDZIAŁU NAUCZYCIELA
B1 Inne

KRYTERIA OCENY

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia teorii miary (sigma-ciało, miara, przestrzeń z miarą, zawartość n-wymiarowego przedziału); zna konstrukcję miary Lebesgue'a; zna definicję funkcji mierzalnej.
NA OCENĘ 3.5	Student zna podstawowe pojęcia teorii miary (sigma-ciało, miara, miara zewnętrzna, zawartość n-wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a); zna definicję funkcji mierzalnej.
NA OCENĘ 4.0	Student zna podstawowe pojęcia teorii miary (sigma-ciało, miara, miara zewnętrzna, zawartość n-wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a) i potrafi ją zaprezentować; student potrafi przedstawić konstrukcję zbioru niemierzalnego na prostej (przy założeniu aksjomatu wyboru); zna definicję i podstawowe własności funkcji mierzalnych.
NA OCENĘ 4.5	Student zna podstawowe struktury algebraiczne związane z podstawami teorii miary (sigma-pierścień, sigma-ciało, klasa mnotoniczna); student zna podstawowe pojęcia teorii miary (miara, miara zewnętrzna, zawartość n-wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a) i potrafi ją zaprezentować; student potrafi przedstawić konstrukcję zbioru niemierzalnego na prostej (przy założeniu aksjomatu wyboru); student zna definicję funkcji mierzalnej i podstawowe własności klasy funkcji mierzalnych; student zna zależności pomiędzy funkcją ciągłą i mierzalną.
NA OCENĘ 5.0	Student zna podstawowe struktury algebraiczne związane z podstawami teorii miary (sigma-pierścień, sigma-ciało, klasa mnotoniczna) i zależności pomiędzy nimi; student zna podstawowe pojęcia teorii miary (miara, miara zewnętrzna, zawartość n-wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a) i potrafi ją zaprezentować; student potrafi przedstawić konstrukcję zbioru niemierzalnego na prostej (przy założeniu aksjomatu wyboru); student zna definicję funkcji mierzalnej i podstawowe własności klasy funkcji mierzalnych; student zna zależności pomiędzy funkcją ciągłą i mierzalną; student potrafi przedstawić przykłady funkcji niemierzalnych.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	

NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów,, przedziałów n -wymiarowych (w n -wymiarowym produkcie prostej) ich przeliczalnych sum i przecięć; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności funkcji w nieskomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność wynika wprost z odpowiednich twierdzeń); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych; zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami a zbieżnością według miary.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów,, przedziałów n -wymiarowych (w n -wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności funkcji w nieskomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność łatwo można wydedukować z odpowiednich twierdzeń); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary (w prostych rachunkowo przypadkach); zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami .
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów n -wymiarowych (w n -wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w oparciu o poznane twierdzenia mierzalność podzbiorów n -wymiarowego produktu prostej rzeczywistej; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności funkcji w nieskomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność nie wymaga szczególnie skomplikowanych uzasadnień); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary (w prostych rachunkowo przypadkach); zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami .
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów n -wymiarowych (w n -wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w oparciu o poznane twierdzenia mierzalność podzbiorów n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności (lub niemierzalności) funkcji w bardziej skomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, granice ciągów funkcji mierzalnych, złożenia funkcji ciągłych i mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność nie wymaga szczególnie skomplikowanych uzasadnień); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary; zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami i potrafi je wykorzystać .

NA OCENĘ 5.0	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów n -wymiarowych (w n -wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w oparciu o poznane twierdzenia mierzalność podzbiorów n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej; Student potrafi twórczo wykorzystać zbiór niemierzalny do badania mierzalności innych zbiorów lub mierzalności funkcji; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności (lub niemierzalności) funkcji w skomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, granice ciągów funkcji mierzalnych, złożenia funkcji ciągłych i mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność wymaga dość skomplikowanych uzasadnień); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary; zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami i potrafi je wykorzystać.
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć w prostych przypadkach, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej jest typu F-sigma lub G-delta.
NA OCENĘ 3.5	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w prostych przypadkach, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej jest F-sigma lub G-delta.
NA OCENĘ 4.0	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej lub wybranych podprzestrzeni funkcji (ciągłych) rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest borelowski. Student potrafi wykorzystać tę wiedzę przy badaniu mierzalności zbiorów i funkcji.
NA OCENĘ 4.5	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej lub wybranych podprzestrzeni funkcji (ciągłych) rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest borelowski. Student potrafi wykorzystać tę wiedzę przy badaniu mierzalności zbiorów i funkcji.
NA OCENĘ 5.0	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej lub wybranych podprzestrzeni funkcji (ciągłych) rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest borelowski i wskazać jego miejsce w hierarchii zbiorów borelowskich. Student potrafi wykorzystać tę wiedzę przy badaniu mierzalności zbiorów i funkcji.
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu).
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane.

NA OCENĘ 4.0	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane. Student potrafi przeanalizować definicję nowego pojęcia i skonstruować przykład definiowanego pojęcia. Student potrafi wydobyć z treści zadania, co powinien udowodnić.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane. Student potrafi przeanalizować definicję nowego pojęcia i skonstruować przykład definiowanego pojęcia. Student potrafi analizować w oparciu o definicje i poznane twierdzenia zależności pomiędzy pojęciami. Student potrafi wydobyć z treści zadania, co powinien udowodnić a następnie skazać poznane twierdzenia, które będą przydatne w dowodzie.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane. Student potrafi przeanalizować definicję nowego pojęcia i skonstruować przykład definiowanego pojęcia. Student potrafi analizować w oparciu o definicje i poznane twierdzenia zależności pomiędzy pojęciami i wskazywać nierozstrzygnięte (na anym etapie poznawania teorii) pytania. Student potrafi wydobyć z treści zadania, co powinien udowodnić a następnie skazać poznane twierdzenia, które będą przydatne w dowodzie i sformułować dowód.

10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W04, K_K01, K_K02, K_K03, K_K06, K_K04	Cel 1	W1 W3 W4 W5 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2
EK2	K_K02, K_K03, K_K04, K_U06, K_U07, K_U09, K_U22, K_U23,	Cel 1	W2 W3 W4 W5 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK3	K_U06, K_U07, K_U09, K_U22, K_U23, K_K04, K_K07	Cel 1	W1 W2 C1 C2 C3	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2
EK4	K_U01, K_K02, K_U35, K_K04, K_K07,	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2

11 WYKAZ LITERATURY

LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] **W. Kołodziej** — *Analiza matematyczna*, Warszawa, 2008, PWN
 [2] **S. Łojasiewicz** — *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Warszawa, 1973, PWN

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] **F. M. Filipczak** — *Teoria miary i całki*, Łódź, 1997, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
 [2] **P. R. Halmos** — *Measure theory*, New York-Heidelberg-Berlin, 1973, Springer-Verlag
 [3] **J.C. Oxtoby** — *Measure and Category*, New York-Heidelberg-Berlin, 1980, Springer-Verlag
 [4] **D.H. Fremlin** — *Measure Theory (tom 1 Irreducible Minimum)*, England, 2000, Torres Fremlin

12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Magdalena Grzech (kontakt: magdag@pk.edu.pl)

OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr Magdalena Grzech (kontakt: smgrzech@cyf-kr.edu.pl)

13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....