

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2022/2023

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: II

Specjalności: Modelowanie matematyczne

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

|                                         |                                                 |
|-----------------------------------------|-------------------------------------------------|
| NAZWA PRZEDMIOTU                        | Rachunek wariacyjny i teoria sterowania         |
| NAZWA PRZEDMIOTU<br>W JĘZYKU ANGIELSKIM | Variational Calculus and Optimal Control Theory |
| KOD PRZEDMIOTU                          | WiT M oIIS D4 22/23                             |
| KATEGORIA PRZEDMIOTU                    | Przedmioty specjalnościowe                      |
| LICZBA PUNKTÓW ECTS                     | 5.00                                            |
| SEMESTRY                                | 4                                               |

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

| SEMESTR | WYKŁAD | ĆWICZENIA | LABORATORIUM | LABORATORIUM<br>KOMPUTERO-<br>WE | SEMINARIUM | PROJEKT |
|---------|--------|-----------|--------------|----------------------------------|------------|---------|
| 4       | 30     | 0         | 0            | 0                                | 0          | 30      |

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Opanowanie metod rachunku wariacyjnego.

**Cel 2** Opanowanie podstawowych zagadnień sterowania optymalnego.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Znajomość podstaw analizy matematycznej umiejętność rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student zna podstawy teorii rachunku wariacyjnego. Student zna podstawy teorii sterowania optymalnego.

**EK2 Umiejętności** Student umie wyznaczać ekstremale funkcjonału w najprostszym zagadnieniu wariacyjnym. Student potrafi wyznaczać ekstremale w przypadku bardziej złożonych zagadnień wariacyjnych. Student potrafi wyznaczać ekstrema funkcjonałów całkowych przy pomocy metod rachunku wariacyjnego. Student potrafi rozwiązywać podstawowe zagadnienia sterowania optymalnego.

**EK3 Umiejętności** Student potrafi rozwiązywać zadania przekrojowe z zakresu EK2.

**EK4 Kompetencje społeczne** Student jest gotowy do samodzielnego poszerzania swojej wiedzy i doskonalenia umiejętności w dziedzinie matematyka.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

| PROJEKT |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                  |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP      | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | LICZBA<br>GODZIN |
| P1      | Najprostsze zagadnienie wariacyjne. Związki pomiędzy ekstremami słabymi i mocnymi funkcjonałów całkowych. Klasyczne zagadnienia rachunku wariacyjnego, zastosowanie równania Eulera do wyznaczania ekstremal w najprostszym zagadnieniu wariacyjnym. Omówienie zadania projektowego oraz rozdzielenie zadań projektowych do samodzielnego opracowania. | 6                |
| P2      | Zaawansowane zagadnienia wariacyjne. Wyznaczanie ekstremal w zaawansowanych zagadnieniach wariacyjnych. Zastosowanie warunków transversalności w zagadnieniach z ruchomymi końcami i w zagadnieniu Bolzy.                                                                                                                                              | 8                |
| P3      | Zagadnienia wariacyjne z więzami. Zastosowanie metody mnożników Lagrange'a do zagadnień izoperymetrycznych i do wyznaczania innych ekstremów warunkowych.                                                                                                                                                                                              | 6                |
| P4      | Warunek wystarczający na ekstremum. Badanie warunków równoważnych warunkowi Jacobiego. Zastosowanie warunku Jacobiego do wyznaczania ekstremum funkcjonału w najprostszym zagadnieniu wariacyjnym.                                                                                                                                                     | 6                |
| P5      | Zagadnienia sterowania optymalnego. Zastosowanie zasady maksimum Pontriagina w zadaniach sterowania optymalnego z ustalonym momentem końcowym.                                                                                                                                                                                                         | 4                |

| WYKŁAD |                                                        |                  |
|--------|--------------------------------------------------------|------------------|
| LP     | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH | LICZBA<br>GODZIN |

| WYKŁAD    |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                  |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                           | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W1</b> | Najprostsze zagadnienie wariacyjne. Pojęcie funkcjonału, ekstrema słabe i mocne. Lemat Lagrange'a, równanie Eulera jako warunek konieczny na ekstremum funkcjonału w najprostszym zagadnieniu wariacyjnym. Twierdzenie Hilberta o regularności ekstremal.                        | 6                |
| <b>W2</b> | Zaawansowane zagadnienia wariacyjne. Zagadnienia wariacyjne dla układów funkcji. Zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów. Zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych. Zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami. Zagadnienie Bolzy.                         | 8                |
| <b>W3</b> | Zagadnienia wariacyjne z więzami. Zagadnienia izoperymetryczne, metoda mnożników Lagrange'a. Zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi.                                                                                                                                    | 6                |
| <b>W4</b> | Warunek wystarczający na ekstremum. Lemat Legendre'a, drugi warunek konieczny na ekstremum funkcjonału w najprostszym zagadnieniu wariacyjnym. Równanie Jacobiego, warunek Jacobiego jako warunek wystarczający na ekstremum funkcjonału w najprostszym zagadnieniu wariacyjnym. | 5                |
| <b>W5</b> | Zagadnienia sterowania optymalnego. Informacja o systemach dynamicznych. Zagadnienie sterowania optymalnego z ustalonym horyzontem czasowym, zasada maksimum Pontriagina. Zagadnienie sterowania optymalnego z nieustalonym momentem końcowym, warunek transversalności.         | 5                |

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

**N1** Wykłady

**N2** Zadania tablicowe

**N3** Konsultacje

**N4** Ćwiczenia projektowe

**N5** e-learning

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

| FORMA AKTYWNOŚCI                                                                                 | ŚREDNIA LICZBA GODZIN<br>NA ZREALIZOWANIE<br>AKTYWNOŚCI |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>                                     |                                                         |
| Godziny wynikające z planu studiów                                                               | 60                                                      |
| Konsultacje przedmiotowe                                                                         | 20                                                      |
| Egzaminy i zaliczenia w sesji                                                                    | 10                                                      |
| <b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b> |                                                         |
| Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury                               | 25                                                      |
| Opracowanie wyników                                                                              | 15                                                      |
| Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji                                           | 20                                                      |
| <b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z<br/>CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>    | <b>150</b>                                              |
| SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU                                                    | 5.00                                                    |

## 9 SPOSOBY OCENY

W przypadku nauki zdalnej zajęcia/kolokwia odbywają się w trybie synchronicznym z wykorzystaniem narzędzi do nauki na odległość.

### OCENA FORMUJĄCA

**F1** Kolokwium

**F2** Projekt indywidualny

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

**P1** Średnia ważona ocen formujących

**P2** Egzamin pisemny

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

**W1** Pozytywna ocena formująca oraz oddany projekt

**W2** Zdany egzamin pisemny

### KRYTERIA OCENY

| EFEKT KSZTAŁCENIA 1 |                                            |
|---------------------|--------------------------------------------|
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie spełnia warunków na ocenę 3.0. |

|                     |                                                                                                                                   |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 3.0        | Student potrafi dobrać właściwy wzór przynajmniej do jednego rozważanego problemu - wiedza sprawdzana podczas egzaminu pisemnego. |
| NA OCENĘ 3.5        | Student potrafi dobrać właściwy wzór przynajmniej do dwóch z rozważanych zadań - wiedza sprawdzana podczas egzaminu pisemnego.    |
| NA OCENĘ 4.0        | Student potrafi dobrać właściwy wzór przynajmniej do trzech z rozważanych zadań - wiedza sprawdzana podczas egzaminu pisemnego.   |
| NA OCENĘ 4.5        | Student potrafi dobrać właściwy wzór przynajmniej do czterech z rozważanych zadań - wiedza sprawdzana podczas egzaminu pisemnego. |
| NA OCENĘ 5.0        | Student potrafi dobrać właściwy wzór do wszystkich z rozważanych zadań - wiedza sprawdzana podczas egzaminu pisemnego.            |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 2 |                                                                                                                                   |
| NA OCENĘ 2.0        | Student otrzymał poniżej 50% punktów z kolokwium                                                                                  |
| NA OCENĘ 3.0        | Student otrzymał co najmniej 50% punktów z kolokwium                                                                              |
| NA OCENĘ 3.5        | Student otrzymał co najmniej 60% punktów z kolokwium                                                                              |
| NA OCENĘ 4.0        | Student otrzymał co najmniej 70% punktów z kolokwium                                                                              |
| NA OCENĘ 4.5        | Student otrzymał co najmniej 80% punktów z kolokwium                                                                              |
| NA OCENĘ 5.0        | Student otrzymał co najmniej 90% punktów z kolokwium                                                                              |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 3 |                                                                                                                                   |
| NA OCENĘ 2.0        | Student otrzymał poniżej 50% sumy punktów z egzaminu pisemnego lub nie oddał projektu                                             |
| NA OCENĘ 3.0        | Student otrzymał co najmniej 50% sumy punktów z egzaminu pisemnego i oddał projekt                                                |
| NA OCENĘ 3.5        | Student otrzymał co najmniej 60% sumy punktów z egzaminu pisemnego i oddał projekt                                                |
| NA OCENĘ 4.0        | Student otrzymał co najmniej 70% sumy punktów z egzaminu pisemnego i oddał projekt                                                |
| NA OCENĘ 4.5        | Student otrzymał co najmniej 80% sumy punktów z egzaminu pisemnego i oddał projekt                                                |
| NA OCENĘ 5.0        | Student otrzymał co najmniej 90% sumy punktów z egzaminu pisemnego i oddał projekt                                                |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 4 |                                                                                                                                   |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie spełnia warunków określonych dla oceny 3.0                                                                            |

|              |                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 3.0 | Student wykonuje powierzone zadania indywidualnie - rezygnuje ze współpracy grupowej i fachowych źródeł wiedzy kosztem jakości rozwiązania. Prace studenta cechuje dopuszczalna niedbałość.                                                                              |
| NA OCENĘ 3.5 | Student wykonuje powierzone zadania indywidualnie - rezygnuje ze współpracy grupowej i fachowych źródeł wiedzy kosztem jakości rozwiązania. Jego prace są wykonane w sposób staranny.                                                                                    |
| NA OCENĘ 4.0 | Student wykonuje powierzone zadania indywidualnie, a także stara się nawiązać współpracę grupową i sięga po fachowe źródła wiedzy. Współpraca grupowa oraz fachowa literatura mają ograniczony wpływ na wypracowane rozwiązania. Prace studenta zawierają drobne błędy.  |
| NA OCENĘ 4.5 | Student wykonuje powierzone zadania indywidualnie, a także stara się nawiązać współpracę grupową i sięga po fachowe źródła wiedzy. Student dostrzega zyski płynące ze współpracy grupowej, jednak jego zbyt małe zaangażowanie powoduje drobne błędy w realizacji zadań. |
| NA OCENĘ 5.0 | Student potrafi rozwiązywać problemy indywidualnie jak i grupowo; korzysta z fachowych źródeł wiedzy; dostrzega zyski płynące ze współpracy grupowej, konsultacji oraz literatury naukowej. Prace studenta cechuje wysoka dbałość o szczegóły.                           |

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE             | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------------------------------|-----------------------|---------------|
| EK1               | K_W04 K_W07                                                                    | Cel 1           | P1 P2 P3 P4 W1 W2 W3 W4       | N1 N2 N3 N5           | F1 P1         |
| EK2               | K_U05 K_U06                                                                    | Cel 1           | P1 W1                         | N1 N2 N3 N5           | F1 P1         |
| EK3               | K_U05 K_U06                                                                    | Cel 1 Cel 2     | P1 P2 P3 P4 P5 W1 W2 W3 W4 W5 | N1 N2 N3 N4 N5        | F1 F2 P1      |
| EK4               | K_K01 K_K02 K_K06                                                              | Cel 1 Cel 2     | P1 P2 P3 P4 P5                | N2 N3 N4              | F1 F2         |

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | **J. Muszynski** — *Równania różniczkowe zwyczajne i elementy rachunku wariacyjnego*, Warszawa, 2003, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej
- [2] | **I.M. Gelfand, S.W. Fomin** — *Rachunek wariacyjny*, Warszawa, 1979, PWN
- [3] | **Radosław Grzymkowski, Jan Pochciał** — *Elementy rachunku wariacyjnego*, Gliwice, 2009, WPKJS

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] | **W. Kołodziej** — *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, Warszawa, 1970, PWN
- [2] | **L. Komzsik** — *Applied Calculus of Variations for Engineers*, Boca Raton, 2009, CRC Press

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Mariusz Jużyniec (kontakt: [juzyniec@pk.edu.pl](mailto:juzyniec@pk.edu.pl))

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr Mariusz Jużyniec (kontakt: [juzyniec@pk.edu.pl](mailto:juzyniec@pk.edu.pl))

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejscowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....