

POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2021/2022

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka Stosowana

Profil: Praktyczny

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: MS

Stopień studiów: I

Specjalności: Analityka Danych

1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

| | |
|---|---|
| NAZWA PRZEDMIOTU | Algebra liniowa z geometrią analityczną |
| NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM | Linear algebra with analytic geometry |
| KOD PRZEDMIOTU | WiT MS pIS C4 21/22 |
| KATEGORIA PRZEDMIOTU | Przedmioty kierunkowe |
| LICZBA PUNKTÓW ECTS | 8.00 |
| SEMESTRY | 1 |

2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

| SEMESTR | WYKŁAD | ĆWICZENIA | LABORATORIUM | LABORATORIUM KOMPUTERO- WE | SEMINARIUM | PROJEKT |
|---------|--------|-----------|--------------|----------------------------------|------------|---------|
| 1 | 45 | 45 | 0 | 0 | 0 | 0 |

3 CELE PRZEDMIOTU

Cel 1 Nauczenie studentów podstawowych metod algebraicznych i geometrycznych niezbędnych w innych dziedzinach matematyki i aktywnie stosowanych we współczesnej inżynierii, ekonomii, finansach, kryptografii, teorii informacji itp.

4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Matematyka na poziomie szkolnym.

5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

EK1 Wiedza Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia dotyczące przestrzeni i odwzorowań liniowych oraz geometrii przestrzeni euklidesowych (K_W01, K_W11).

EK2 Wiedza Student potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin (K_W05, K_U08).

EK3 Kompetencje społeczne Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia i twierdzenia dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana) (K_W01, K_W04).

EK4 Umiejętności Student potrafi rozwiązywać typowe zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje z tej tematyki (K_U08, K_U35).

6 TREŚCI PROGRAMOWE

| WYKŁAD | | |
|-----------|---|------------------|
| LP | TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH | LICZBA GODZIN |
| W1 | Grupy podstawowe własności. Grupy przekształceń, grupy permutacji (cykle, transpozycje, transpozycje liczb sąsiednich, inwersje, parzystość). Pierścienie i ciała podstawowe własności. Pierścień klas reszt modulo n . | 3 |
| W2 | Ciało liczb zespolonych (postaci algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej). Wzór de Moivre'a, pierwiastkowanie, potęgowanie, interpretacja geometryczna. | 3 |
| W3 | Pierścień wielomianów. Dzielenie z resztą, algorytm Euklidesa, NWW i NWD w pierścieniu wielomianów. Rozkład wielomianu na czynniki nieprzywiedlne, postać kanoniczna wielomianu. Pierwiastki wielomianu (twierdzenie Bzouta, pierwiastki wielokrotne). Schemat Hornera. Zasadnicze twierdzenie algebry. Wielomiany rzeczywiste i zespolone. | 4 |
| W4 | Przestrzenie liniowe podstawowe własności. Kombinacja liniowa, liniowa niezależność, liniowa zależność, baza i wymiar przestrzeni liniowej. Podprzestrzenie liniowe. Operacje na podprzestrzeniach (suma, przecięcie, suma prosta). Przestrzeń ilorazowa. Wymiar sumy podprzestrzeni i wymiar przestrzeni ilorazowej. Izomorfizm przestrzeni liniowych. | 5 |
| W5 | Macierze, przekształcenia liniowe (jądro, obraz), ich wektory własne i wartości własne. Rząd macierzy. Macierz przejścia i transformacja współrzędnych wektora przy zmianie bazy. Podobieństwo macierzy. | 6 |

| WYKŁAD | | |
|--------|---|------------------|
| LP | TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH | LICZBA GODZIN |
| W6 | Wyznaczniki i układy równań liniowych podstawowe wiadomości. Metoda eliminacji Gaussa. Wyznacznik iloczynu macierzy. Rozwinięcie Laplacea (minory, dopełnienia algebraiczne). Macierz odwrotna. Jednorodnie i niejednorodnie układy równań liniowych. Układy Cramera. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. | 5 |
| W7 | Twierdzenie Hamiltona-Cayleya. Klatki jordanowskie, postać kanoniczna Jordana macierzy. | 4 |
| W8 | Przestrzenie z iloczynem skalarnym (pojęcie i podstawowe własności iloczynu skalarnego, przestrzeń euklidesowa, przestrzeń unitarna). Długość wektora, kąt między wektorami, iloczyn wektorowy i jego zastosowanie. Baza ortogonalna, proces ortogonalizacji Grama-Schmidta. Dopełnienie ortogonalne. | 4 |
| W9 | Elementy geometrii analitycznej: iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy, iloczyn mieszany i ich zastosowania, równania płaszczyzny (ogólne, parametryczne, płaszczyzna przechodząca przez trzy punkty), równania prostej (kierunkowe, parametryczne, prosta przechodząca przez dwa punkty), odległość punktu od prostej i płaszczyzny. | 3 |
| W10 | Macierze ortogonalne, macierze unitarne. Izometrie. Macierze hermitowskie i symetryczne, ich diagonalizacja. | 4 |
| W11 | Formy dwuliniowe i kwadratowe podstawowe własności. Przekształcanie form kwadratowych do postaci kanonicznej (metoda Lagrangea i metoda sprowadzania do osi głównych). Krzywe algebraiczne i powierzchnie drugiego stopnia. | 4 |

| ĆWICZENIA | | |
|-----------|---|------------------|
| LP | TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH | LICZBA GODZIN |
| C1 | Grupy podstawowe własności. Grupy przekształceń, grupy permutacji (cykle, transpozycje, transpozycje liczb sąsiednich, inwersje, parzystość). Pierścienie i ciała podstawowe własności. Pierścień klas reszt modulo n . | 3 |
| C2 | Ciało liczb zespolonych (postaci algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej). Wzór de Moivre'a, pierwiastkowanie, potęgowanie, interpretacja geometryczna. | 3 |
| C3 | Pierścień wielomianów. Dzielenie z resztą, algorytm Euklidesa, NWW i NWD w pierścieniu wielomianów. Rozkład wielomianu na czynniki nieprzywiedlne, postać kanoniczna wielomianu. Pierwiastki wielomianu (twierdzenie Bzouta, pierwiastki wielokrotne). Schemat Hornera. Zasadnicze twierdzenie algebry. Wielomiany rzeczywiste i zespolone. | 4 |
| C4 | Przestrzenie liniowe podstawowe własności. Kombinacja liniowa, liniowa niezależność, liniowa zależność, baza i wymiar przestrzeni liniowej. Operacje na podprzestrzeniach (suma, przecięcie, suma prosta). Przestrzeń ilorazowa. Wymiar sumy i wymiar przestrzeni ilorazowej. Izomorfizmy przestrzeni liniowych.. | 6 |

| ĆWICZENIA | | |
|-----------|--|------------------|
| LP | TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH | LICZBA GODZIN |
| C5 | Macierze, przekształcenia liniowe (jądro, obraz), ich wektory własne i wartości własne. Rząd macierzy. Macierz przejścia i transformacja współrzędnych wektora przy zmianie bazy. Podobieństwo macierzy. | 6 |
| C6 | Obliczanie wyznaczników, wyznaczanie macierzy odwrotnych, rozwiązywanie układów równań liniowych. | 5 |
| C7 | Sprowadzanie macierzy do postaci kanonicznej Jordana. | 4 |
| C8 | Przestrzeń z iloczynem skalarnym. Długość wektora, kąt między wektorami. Baza ortogonalna, proces ortogonalizacji Grama-Schmidta. Dopełnienie ortogonalne. | 3 |
| C9 | Elementy geometrii analitycznej: iloczyn wektorowy, iloczyn mieszany i ich zastosowania, równania płaszczyzny, równania prostej, odległość punktu od prostej i płaszczyzny. | 3 |
| C10 | Diagonalizacja macierzy ortogonalnych, unitarnych, hermitowskich i symetrycznych. | 4 |
| C11 | Przekształcanie form kwadratowych do postaci kanonicznej (metoda Lagrangea i metoda sprowadzania do osi głównych). Krzywe algebraiczne i powierzchnie drugiego stopnia. | 4 |

7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady

N2 Zadania tablicowe

N3 Dyskusja

N4 Konsultacje

N5 W sytuacji zdalnego nauczania prowadzone są za pośrednictwem MS Teams, na żywo.

8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

| FORMA AKTYWNOŚCI | ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI |
|--|---|
| Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym: | |
| Godziny wynikające z planu studiów | 90 |
| Konsultacje przedmiotowe | 30 |
| Egzaminy i zaliczenia w sesji | 15 |
| Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym: | |
| Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury | 105 |
| Opracowanie wyników | 0 |
| Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji | 0 |
| SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA | 240 |
| SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU | 8.00 |

9 SPOSOBY OCENY

OCENA FORMUJĄCA

F1 sprawdziany z bieżącego materiału (na ćwiczeniach)

F3 aktywność na zajęciach

OCENA PODSUMOWUJĄCA

P1 kolokwium (podsumowujące przedmiot) pisemne i ustne

P2 Egzamin ustny

P3 Egzamin pisemny

WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

W1 Warunkiem koniecznym i wystarczającym zaliczenia ćwiczeń jest uzyskanie więcej niż połowy maksymalnej sumarycznej liczby punktów ze wszystkich sprawdzianów. Warunkiem koniecznym i wystarczającym zdania egzaminu pisemnego jest zdobycie więcej niż połowy maksymalnej sumarycznej liczby punktów ze wszystkich zadań. Ocena końcowa z przedmiotu jest średnią arytmetyczną trzech ocen częściowych: z ćwiczeń (zaliczenie), egzaminu pisemnego i egzaminu ustnego. Wszystkie oceny częściowe muszą być pozytywne.

OCENA AKTYWNOŚCI BEZ UDZIAŁU NAUCZYCIELA

B1 Test



KRYTERIA OCENY

| EFEKT KSZTAŁCENIA 1 | |
|---------------------|--|
| NA OCENĘ 2.0 | Student nie zna, nie rozumie i nie objaśnia podstawowe pojęcia dotyczące przestrzeni i odwzorowań liniowych oraz geometrii przestrzeni euklidesowych |
| NA OCENĘ 3.0 | Student rozwiązuje standardowe zadania, formułuje definicje podstawowych pojęć, ilustruje ich przykładami |
| NA OCENĘ 3.5 | Student rozwiązuje standardowe zadania, formułuje definicje podstawowych pojęć, ilustruje ich przykładami, formułuje podstawowe zagadnienia |
| NA OCENĘ 4.0 | Student rozwiązuje standardowe zadania praktyczne i teoretyczne, formułuje definicje podstawowych pojęć, ilustruje ich przykładami, formułuje podstawowe zagadnienia i buduje ich dowody |
| NA OCENĘ 4.5 | Student rozwiązuje standardowe zadania praktyczne i teoretyczne, formułuje definicje podstawowych pojęć, ilustruje ich przykładami, formułuje zagadnienia i buduje ich dowody |
| NA OCENĘ 5.0 | Student rozwiązuje standardowe i niestandardowe zadania praktyczne i teoretyczne, formułuje definicje podstawowych pojęć, ilustruje ich przykładami, formułuje zagadnienia i buduje ich dowody |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 2 | |
| NA OCENĘ 2.0 | Student nie potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również nie potrafi rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin |
| NA OCENĘ 3.0 | Student potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin |
| NA OCENĘ 3.5 | Student potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin, formułuje podstawowe zagadnienia |
| NA OCENĘ 4.0 | Student potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin, formułuje podstawowe zagadnienia, i może ich udowodnić |
| NA OCENĘ 4.5 | Student potrafi ilustrować przykładami pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać zadania (teoretyczne i praktyczne) z obu tych dziedzin, formułuje zagadnienia i może ich udowodnić |
| NA OCENĘ 5.0 | Student potrafi ilustrować przykładami pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać zadania (teoretyczne i praktyczne, standardowe i niestandardowe) z obu tych dziedzin, formułuje zagadnienia i może ich udowodnić |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 3 | |
| NA OCENĘ 2.0 | Student nie zna, nie rozumie i nie objaśnia podstawowe pojęcia i twierdzenia dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana) |

| | |
|---------------------|---|
| NA OCENĘ 3.0 | Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia (i ilustruje ich przykładami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana) |
| NA OCENĘ 3.5 | Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia i twierdzenia (i ilustruje ich przykładami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana) |
| NA OCENĘ 4.0 | Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia i twierdzenia (i ilustruje ich przykładami, z dowodami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana) |
| NA OCENĘ 4.5 | Student zna, rozumie i objaśnia pojęcia i twierdzenia (i ilustruje ich przykładami teoretycznymi i praktycznymi, z dowodami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana) |
| NA OCENĘ 5.0 | Student zna, rozumie i objaśnia pojęcia i twierdzenia (i ilustruje ich przykładami teoretycznymi i praktycznymi, standardowymi i niestandardowymi, z dowodami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana) |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 4 | |
| NA OCENĘ 2.0 | Student nie potrafi rozwiązywać typowe zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje z tej tematyki |
| NA OCENĘ 3.0 | Student potrafi rozwiązywać typowe zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze praktyczne informacje z tej tematyki |
| NA OCENĘ 3.5 | Student potrafi rozwiązywać typowe zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, formułować podstawowe zagadnienia, jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje (teoretyczne i praktyczne) z tej tematyki |
| NA OCENĘ 4.0 | Student potrafi rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, formułować podstawowe zagadnienia (z dowodami), jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje (teoretyczne i praktyczne) z tej tematyki |
| NA OCENĘ 4.5 | Student potrafi rozwiązywać (standardowe) zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, formułować zagadnienia (z dowodami), jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje (teoretyczne i praktyczne) z tej tematyki |

| | |
|--------------|---|
| NA OCENĘ 5.0 | Student potrafi rozwiązywać (standardowe i niestandardowe) zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, formułować zagadnienia (z dowodami), jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje (teoretyczne i praktyczne) z tej tematyki |
|--------------|---|

10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY |
|-------------------|--|-----------------|--|-----------------------|---------------|
| EK1 | K_W01 K_W02 K_W03 K_W04 K_W11 | Cel 1 | W1 W2 W3 W4 C1 C2 C3 C4 | N1 N2 N3 N4 | F1 F3 P1 |
| EK2 | K_W05 K_U08 | Cel 1 | W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 C5 C6 C7 C8 C9 C10 C11 | N1 N2 N3 N4 | F1 F3 P1 |
| EK3 | K_W01 K_W04 | Cel 1 | W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 C9 C10 C11 | N1 N2 N3 N4 | F1 F3 P1 |
| EK4 | K_U08 K_U35 | Cel 1 | W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 C9 C10 C11 | N1 N2 N3 N4 | F1 F3 P1 |

11 WYKAZ LITERATURY

LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | **A. Piękosz** — *Algebra liniowa*, Kraków, 2009, PK
- [2] | **J. Gancarzewicz** — *Algebra liniowa i jej zastosowania*, Kraków, 2004, Wydawnictwo UJ
- [3] | **J. Rutkowski** — *Algebra liniowa w zadaniach*, Warszawa, 2010, PWN
- [4] | **J. Rutkowski** — *Algebra abstrakcyjna w zdaniach*, Warszawa, 2001, PWN

- [5] J. Klukowska, I. Nabiałek — *Algebra dla studentów*, Warszawa, 1999, PWN
- [6] S. Przybyło, A. Szlachtowski — *Algebra i wieloliniowa geometria analityczna w zadaniach*, Warszawa, 1988, PWN
- [7] F. Leja — *Geometria analityczna*, Warszawa, 1972, PWN

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] P. Kajetanowicz, J. Wierzejewska — *Algebra z geometrią analityczną*, Warszawa, 2008, PWN

12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

prof. dr hab. Orest Artemowych (kontakt: artemo@pk.edu.pl)

OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

- 1 Dr Marcin Skrzyński (kontakt: marcin.skrzynski@pk.edu.pl)
- 2 Dr Kamil Kular (kontakt: kkular@pk.edu.pl)
- 3 Dr Monika Herzog (kontakt: mherzog@pk.edu.pl)

13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....
.....
.....