

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2020/2021

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Modelowanie matematyczne

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

|                                         |                                |
|-----------------------------------------|--------------------------------|
| NAZWA PRZEDMIOTU                        | Rachunek prawdopodobieństwa II |
| NAZWA PRZEDMIOTU<br>W JĘZYKU ANGIELSKIM | Probability II                 |
| KOD PRZEDMIOTU                          | WiT M oIS C13 20/21            |
| KATEGORIA PRZEDMIOTU                    | Przedmioty kierunkowe          |
| LICZBA PUNKTÓW ECTS                     | 5.00                           |
| SEMESTRY                                | 5                              |

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

| SEMESTR | WYKŁAD | ĆWICZENIA | LABORATORIUM | LABORATORIUM<br>KOMPUTERO-<br>WE | SEMINARIUM | PROJEKT |
|---------|--------|-----------|--------------|----------------------------------|------------|---------|
| 5       | 30     | 30        | 0            | 0                                | 0          | 0       |

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Celem przedmiotu jest zapoznanie studentów z bardziej zaawansowanymi zagadnieniami rachunku prawdopodobieństwa.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Rachunek prawdopodobieństwa I

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Umiejętności** Student umie posługiwać się wektorami losowymi, umie wyznaczać ich parametry oraz rozkłady funkcji wektorów losowych, zna zastosowania praktyczne podstawowych rozkładów

**EK2 Umiejętności** Student umie stosować centralne twierdzenia graniczne oraz prawa wielkich liczb

**EK3 Umiejętności** Student umie posługiwać się funkcjami charakterystycznymi rozkładów

**EK4 Wiedza** Student zna podstawowe definicje, twierdzenia z zakresu treści programowych przedmiotu

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

| WYKŁAD    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                  |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W1</b> | Prawa wielkich liczb. Zbieżności zmiennych losowych. Słabe prawo wielkich liczb, nierówność Kołmogorowa, mocne prawo wielkich liczb, zbieżność stochastyczna, zbieżność prawie na pewno, zbieżność wg p-tego momentu, zależności między zbieżnościami. Słaba zbieżność. Warunki równoważne słabej zbieżności, zbieżność ciągu dystrybuant, twierdzenia Hellyego. | 10               |
| <b>W2</b> | Twierdzenie Prochorowa. Rodzina ciasna, rodzina względnie zwarta, tw. Prochorowa. Funkcje charakterystyczne. Definicja, własności, funkcje tworzące, tw. o jednoznaczności, tw. o wyznaczaniu momentów, zależność dystrybuanty od funkcji charakterystycznej, funkcje charakterystyczne poznanych rozkładów, tw. Levyego.                                        | 5                |
| <b>W3</b> | Centralne twierdzenia graniczne. Warunki, przy których spełniony jest warunek Lindeberga, tw. Lindeberga-Levyego, tw. Moivre'a-Laplace'a, dowód CTG.                                                                                                                                                                                                             | 10               |
| <b>W4</b> | Warunkowa wartość oczekiwana. Warunkowa przestrzeń probabilistyczna, warunkowa wartość oczekiwana względem rozbitcia przeliczalnego, względem sigma-algebry, własności warunkowej wartości oczekiwanej, rozkłady warunkowe, uogólniony wzór Bayesa.                                                                                                              | 5                |

| ĆWICZENIA |                                                                                                                                                                           |                  |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                    | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>C1</b> | Funkcje zmiennych losowych, wyznaczanie rozkładów.                                                                                                                        | 5                |
| <b>C2</b> | Wektory losowe, n-wymiarowy rozkład normalny, wyznaczanie rozkładów brzegowych, badanie niezależności zmiennych losowych, funkcje wektorów losowych, wyznaczanie splotów. | 5                |

| ĆWICZENIA |                                                                                                                             |                  |
|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                      | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>C3</b> | Obliczanie funkcji charakterystycznych zmiennych losowych, wyznaczanie rozkładu, gdy zadana jest funkcja charakterystyczna. | 5                |
| <b>C4</b> | Zastosowania nierówności: Markowa, Czebyszewa, Schwartz.                                                                    | 5                |
| <b>C5</b> | Zastosowania twierdzeń: Poissona, Moivre'a-Laplace'a, Lindeberga-Levy'ego.                                                  | 5                |
| <b>C6</b> | Wyznaczanie warunkowej wartości oczekiwanej, badanie jej własności.                                                         | 5                |

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

**N1** Wykłady (w sytuacji zdalnego nauczania wykłady prowadzone są za pośrednictwem MS Teams)

**N2** Ćwiczenia (w sytuacji zdalnego nauczania ćwiczenia prowadzone są za pośrednictwem MS Teams)

**N3** E-learning (platforma Delta)

**N4** Konsultacje

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

| FORMA AKTYWNOŚCI                                                                                 | ŚREDNIA LICZBA GODZIN<br>NA ZREALIZOWANIE<br>AKTYWNOŚCI |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>                                     |                                                         |
| Godziny wynikające z planu studiów                                                               | 60                                                      |
| Konsultacje przedmiotowe                                                                         | 25                                                      |
| Egzaminy i zaliczenia w sesji                                                                    | 5                                                       |
| <b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b> |                                                         |
| Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury                               | 30                                                      |
| Opracowanie wyników                                                                              | 0                                                       |
| Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji                                           | 0                                                       |
| samodzielne rozwiązywanie zadań                                                                  | 30                                                      |
| <b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>        | <b>150</b>                                              |
| SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU                                                    | 5.00                                                    |

## 9 SPOSOBY OCENY

### OCENA FORMUJĄCA

**F1** Kolokwium (w sytuacji zdalnego nauczania za pośrednictwem platformy e-learningowej oraz MS Teams)

**F2** Test z teorii (na platformie Delta)

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

**P1** Egzamin pisemny

**P2** Egzamin ustny

**P3** Zaliczenie ćwiczeń

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

**W1** Przewidziane są dwa/trzy kolokwia w trakcie semestru

**W2** Za aktywność na ćwiczeniach można uzyskać dodatkowe punkty

**W3** Studenci, którzy za wszystkie kolokwia i aktywność uzyskają sumę punktów mniejszą od połowy sumy punktów za wszystkie kolokwia, przed przystąpieniem do egzaminu, zobowiązani są napisać kolokwium poprawkowe

**W4** Studenci, którzy za wszystkie kolokwia i aktywność uzyskają co najmniej 80% sumy punktów za kolokwia, są zwolnieni z egzaminu pisemnego

**W5** Ocena końcowa jest średnią ważoną ocen P1, P2 i P3

### KRYTERIA OCENY

| EFEKT KSZTAŁCENIA 1 |                                                                                                                                               |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie umie posługiwać się wektorami losowymi                                                                                            |
| NA OCENĘ 3.0        | Student umie posługiwać się podstawowymi wektorami losowymi, umie wyznaczać gęstości rozkładów brzegowych w najprostszych przypadkach         |
| NA OCENĘ 3.5        | Student umie posługiwać się podstawowymi wektorami losowymi, umie wyznaczać gęstości rozkładów brzegowych                                     |
| NA OCENĘ 4.0        | Jak na ocenę 3.5, dodatkowo student umie wyznaczać parametry wektorów losowych i badać niezależność zmiennych losowych                        |
| NA OCENĘ 4.5        | Jak na ocenę 4.0, dodatkowo student umie wyznaczać rozkłady prostszych funkcji wektorów losowych, w przypadku absolutnie ciągłym i dyskretnym |
| NA OCENĘ 5.0        | Jak na ocenę 4.5, dodatkowo student umie wyznaczać rozkłady dowolnych funkcji wektorów losowych, w przypadku absolutnie ciągłym i dyskretnym  |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 2 |                                                                                                                                               |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie umie stosować centralnych twierdzeń granicznych oraz praw wielkich liczb                                                          |
| NA OCENĘ 3.0        | Student umie stosować centralne twierdzenia graniczne oraz prawa wielkich liczb w najbardziej typowych sytuacjach                             |

|                     |                                                                                                                                                                                |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 3.5        | Student umie stosować centralne twierdzenia graniczne oraz prawa wielkich liczb w najbardziej typowych sytuacjach oraz w zagadnieniach odwrotnych                              |
| NA OCENĘ 4.0        | Student umie stosować centralne twierdzenia graniczne oraz prawa wielkich liczb w bardziej złożonych zagadnieniach                                                             |
| NA OCENĘ 4.5        | Jak na ocenę 4.0, dodatkowo student zwraca uwagę na optymalny dobór twierdzenia do oszacowania prawdopodobieństwa                                                              |
| NA OCENĘ 5.0        | Jak na ocenę 4.5, dodatkowo student umie interpretować otrzymane wyniki                                                                                                        |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 3 |                                                                                                                                                                                |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie umie posługiwać się funkcjami charakterystycznymi rozkładów                                                                                                        |
| NA OCENĘ 3.0        | Student umie wyznaczać funkcje charakterystyczne typowych rozkładów                                                                                                            |
| NA OCENĘ 3.5        | Student umie wyznaczać funkcje charakterystyczne typowych rozkładów i korzystać z ich własności                                                                                |
| NA OCENĘ 4.0        | Student umie wyznaczać funkcje charakterystyczne typowych rozkładów oraz wyznaczać rozkłady, gdy znana jest funkcja charakterystyczna                                          |
| NA OCENĘ 4.5        | Student umie wyznaczać funkcje charakterystyczne rozkładów oraz wyznaczać rozkłady, gdy znana jest funkcja charakterystyczna w trudniejszych przypadkach                       |
| NA OCENĘ 5.0        | Jak na ocenę 4.5, dodatkowo umie stosować funkcje charakterystyczne do wyznaczania rozkładów prawdopodobieństwa                                                                |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 4 |                                                                                                                                                                                |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.                                                                                           |
| NA OCENĘ 3.0        | Student umie wypowiedzieć definicje i twierdzenia z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.                                                                            |
| NA OCENĘ 3.5        | Student umie wypowiedzieć definicje i twierdzenia z zakresu przedstawionego na wykładach materiału, zna najprostsze dowody.                                                    |
| NA OCENĘ 4.0        | Jak na ocenę 3.5. Dodatkowo: Student umie ilustrować przedstawiane definicje i twierdzenia przykładami                                                                         |
| NA OCENĘ 4.5        | Jak na ocenę 4.0. Dodatkowo: Student umie dowodzić najważniejsze twierdzenia przedstawione na wykładach.                                                                       |
| NA OCENĘ 5.0        | Jak na ocenę 4.5. Dodatkowo: Student umie dowodzić twierdzenia przedstawione na wykładach, cytować narzędzia z innych działów matematyki stosowane w powyższych rozumowaniach. |

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY  |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|----------------|
| EK1               | K_U30 K_U32                                                                    | Cel 1           | W1 C1 C2          | N1 N2 N3 N4           | F1 F2 P1 P2 P3 |
| EK2               | K_U32                                                                          | Cel 1           | W1 W3 C4 C5       | N1 N2 N3 N4           | F1 F2 P1 P2 P3 |
| EK3               | K_U30 K_U32                                                                    | Cel 1           | W2 C3             | N1 N2 N3 N4           | F1 F2 P1 P2 P3 |
| EK4               | K_W02 K_W04<br>K_W05                                                           | Cel 1           | W1 W2 W3 W4<br>C6 | N1 N2 N3 N4           | F1 F2 P1 P2 P3 |

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

[1] | J. Jakubowski, R. Sztencel — *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, Warszawa, 2001, Script

[2] | M. Wiciak — *Elementy probabilistyki w zadaniach*, Kraków, 2008, , Wydawnictwo PK

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

[1] | P. Billingsley — *Prawdopodobieństwo i miara*, Warszawa, 1987, PWN

[2] | W. Feller — *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, Warszawa, 1977, PWN

[3] | J. Stojanow — *Zbiór zadań z rachunku prawdopodobieństwa*, Warszawa, 1982, PWN

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Margareta Wiciak (kontakt: mwiciak@pk.edu.pl)

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr Margareta Wiciak (kontakt: mwiciak@pk.edu.pl)

3 dr Jan Pudełko (kontakt: jpudelko@pk.edu.pl)

4 dr Krzysztof WESOŁOWSKI (kontakt: kwesolowski@pk.edu.pl)

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

(miejscowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)



**PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI** (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....  
.....  
.....