

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2019/2020

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: II

Specjalności: Modelowanie matematyczne

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Analiza matematyczna
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	Mathematical analysis
KOD PRZEDMIOTU	WiT M oIIS B1 19/20
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty podstawowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	10.00
SEMESTRY	1

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
1	60	60	0	0	0	0

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Zapoznanie studentów z podstawowymi faktami teorii miary i całki Lebesgue'a; przestrzeń  $L_p$ .

**Cel 2** Formy różniczkowe oraz ich całkowanie.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Zaliczony pierwszy stopień studiów matematycznych.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student poznaje podstawy teorii miary, miary i całki Lebesgue'a i przestrzenie  $L_p$ .

**EK2 Umiejętności** Student potrafi sprawdzać czy dane odwzorowanie jest miarą, mierzalność zbiorów i funkcji, stosować twierdzenie Fubini'ego i twierdzenie o zmianie zmiennych. Student umie stosować poznane fakty do obliczania całek wielokrotnych, całek z form różniczkowych i uzasadniać poprawność wykonywanych operacji.

**EK3 Wiedza** Student poznaje formy różniczkowe, działania na formach i ich własności oraz ich całkowanie na podrozmiarowościach  $R_n$ .

**EK4 Umiejętności** Student potrafi wykonywać podstawowe działania na formach różniczkowych, obliczać całki z form różniczkowych na podrozmiarowościach  $R_n$  (szczególnie całki krzywoliniowe i powierzchniowe) oraz znać ich zastosowania.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W1</b>	Definicja sigma ciała - własności i przykłady.	2
<b>W2</b>	Miara i jej własności.	2
<b>W3</b>	Miara zewnętrzna, twierdzenie Caratheodory'ego	3
<b>W4</b>	Miara Lebesgue'a, charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.	3
<b>W5</b>	Funkcje mieralne, warunki równoważne, przykłady.	2
<b>W6</b>	Działania na funkcjach mierzalnych.	2
<b>W7</b>	Funkcje proste i ich całkowanie, własności całek z funkcji prostych.	4
<b>W8</b>	Funkcje mieralne nieujemne jako granice rosnących ciągów funkcji prostych, całka z funkcji mierzalnej nieujemnej.	3
<b>W9</b>	Podstawowe własności całek z funkcji mierzalnych nieujemnych.	2
<b>W10</b>	Twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, lemat Fatou.	2
<b>W11</b>	Całka Lebesgue'a, definicja i własności.	2
<b>W12</b>	Twierdzenia Lebesgue'a o monotonicznym i o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.	2
<b>W13</b>	Związek Całki Riemanna z całką Lebesgue'a, zasada Cavalieriego.	2

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W14</b>	Twierdzenia: Tonelly'ego i Fubinięgo.	2
<b>W15</b>	Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a.	2
<b>W16</b>	Odwzorowania p-liniowe znakozmienne, działania algebraiczne i iloczyn zewnętrzny, baza przestrzeni odwzorowań p-liniowych znakozmiennych i jej postać.	3
<b>W17</b>	Formy różniczkowe stopnia p - własności, postać kanoniczna i klasa.	3
<b>W18</b>	Różniczka zewnętrzna formy różniczkowej i jej własności.	2
<b>W19</b>	Zmiana zmiennych w formie różniczkowej.	2
<b>W20</b>	Pierwotna formy różniczkowej, twierdzenie Poincarego.	3
<b>W21</b>	Całka krzywoliniowa zorientowana i jej obliczanie oraz zastosowania, niezależność od drogi całkowania.	3
<b>W22</b>	Orientacja podrozmaitości $R_n$ , twierdzenie Greena - Riemanna.	3
<b>W23</b>	Całka powierzchniowa zorientowana i jej związek z całką powierzchniową niezorientowaną, Twierdzenia Greena - Gaussa - Ostrogradskiego.	3
<b>W24</b>	Twierdzenie Stokesa, elementy teorii pól wektorowych.	3

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>C1</b>	Sprawdzanie czy dana rodzina jest sigma-ciałem, wyznaczanie własności sumy, przecięcia sigma -ciał, pierścienie, sigma-pierścienie, ciała podzbiorów danego zbioru	2
<b>C2</b>	Sprawdzanie czy dana funkcja jest miarą, wykorzystanie własności miary przy dowodzeniu własności nie podanych na wykładzie, miary liczące, atomowe	3
<b>C3</b>	Sprawdzanie czy dana funkcja jest miarą zewnętrzną, konstruowanie miar przy pomocy twierdzenia Caratheodoryego, zupełność	3
<b>C4</b>	Wykazywanie własności m-wymiarowa miary zewnętrznej Lebesguea, zbiór Cantora, zbiór Vitaliego	2
<b>C5</b>	Sprawdzanie mierzalności funkcji względem danego sigma-ciała, konstruowanie sigma-ciał generowanych przez funkcje	2
<b>C6</b>	Działania na funkcjach mierzalnych	2

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C7	Przypomnienie wiadomości o szeregach liczbowych, całkowanie funkcji prostej nieujemnej, całka funkcji Dirichleta, całka funkcji skokowej Heavisidea, własności całki funkcji prostej	4
C8	Całkowanie funkcji mierzalnej nieujemnej, konstruowanie ciągu aproksymującego funkcję mierzalną nieujemną w przypadku przestrzeni ciągów oraz przestrzeni funkcji rzeczywistych	3
C9	Badanie całkowalności funkcji, wykorzystanie warunku koniecznego na całkowalność oraz warunku wystarczającego	2
C10	Zastosowanie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, zastosowanie lematu Fatou	2
C11	Całka Lebesguea	2
C12	Zastosowanie twierdzenia Lebesguea o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki	2
C13	Wykorzystanie związku całki Riemanna z całką Lebesguea, wykorzystanie sum całkowych Riemanna do wyznaczania sum szeregów, wykorzystanie zasady Cavalieriego, geometryczna interpretacja całki funkcji nieujemnej	2
C14	Zastosowania twierdzeń: Tonellyego i Fubinięgo	2
C15	Zamiana zmiennych w całce Lebesguea	2
C16	Przypomnienie własności odwzorowań liniowych i wieloliniowych, sprawdzanie czy dane odwzorowanie jest p-liniowe znakozmienne, struktura przestrzeni $A_p(E;F)$ , mnożenie zewnętrzne odwzorowań wieloliniowych znakozmiennych i wykorzystanie jego własności, obliczanie iloczynu zewnętrznego k-form liniowych, wyznaczanie bazy przestrzeni $A_p(R^k; R)$ , wykorzystanie domkniętości przestrzeni $A_p(R^k; R)$ , przestrzeń $A_p(R^k; R)$ jako przestrzeń unitarna	2
C17	Sprawdzanie czy dane odwzorowanie jest formą różniczkową, postać kanoniczna	2
C18	Wykonywanie operacji na formach różniczkowych: iloczyn zewnętrzny, różniczka zewnętrzna, zmiana zmiennych w formie różniczkowej	4
C19	Wyznaczanie pierwotnej formy, badanie zamkniętości formy, wykorzystanie twierdzenia Poincarego	2
C20	Przypomnienie definicji łuku, krzywej, podrozmaitości jednowymiarowej, badanie zgodności orientacji krzywej z wyborem parametryzacji, obliczanie całki krzywoliniowej zorientowanej, wykorzystanie niezależności od parametryzacji krzywej, całkowanie formy różniczkowej zamkniętej, cykl, badanie czy krzywe są homotopijne, zbiór p-spójny, obliczanie całki krzywoliniowej zorientowanej jako granicy ciągu sum całkowych, zastosowanie całki krzywoliniowej	3

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>C21</b>	Podrozmaitości orientowalne, wstęga Möbiusa, sprawdzanie czy dany zbiór jest kompaktem, kompaktem z brzegiem, kompaktem z brzegiem na podrozmaitości, sprawdzanie zgodności orientacji, obliczanie całki formy różniczkowej stopnia drugiego w przestrzeni $R^2$ , zastosowanie twierdzenia Greena-Riemanna, obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej, wykorzystanie własności całki powierzchniowej zorientowanej	3
<b>C22</b>	Obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej, wykorzystanie własności całki powierzchniowej zorientowanej	3
<b>C23</b>	Definicja całki formy różniczkowej stopnia trzeciego w $R^3$ , zastosowania twierdzenia Greena-Gaussa-Ostrogradskiego	3
<b>C24</b>	Zastosowania twierdzenia Stokesa, wyznaczanie dywergencji, rotacji, gradientu pola	3

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady

N2 Zadania tablicowe

N3 Konsultacje

N4 E-learning (platforma Moodle)

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
<b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>	
Godziny wynikające z planu studiów	120
Konsultacje przedmiotowe	40
Egzaminy i zaliczenia w sesji	10
<b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b>	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	110
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
Zapoznanie się z materiałami na platformie e-learningowej	20
<b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>	<b>300</b>
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	10.00

## 9 SPOSOBY OCENY

Obok obowiązkowej obecności warunkiem otrzymania zaliczenia z ćwiczeń jest uzyskanie co najmniej 50

### OCENA FORMUJĄCA

**F1** Kolokwium

**F2** Odpowiedź ustna

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

**P1** Egzamin pisemny

**P2** Egzamin ustny

**P3** Średnia ważona ocen formujących

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

**W1** Do egzaminu mogą przystąpić studenci, którzy otrzymali zaliczenie z ćwiczeń.

**W2** Egzamin składa się z części pisemnej i części ustnej.

**W3** Ocena końcowa jest średnią ważoną ocen P1, P2, P3.

### KRYTERIA OCENY

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 2.0	Student nie wykazał wiedzy o której mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, tzn. potrafi ze zrozumieniem podawać definicje, twierdzenia i przykłady przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia z podanej listy.
NA OCENĘ 3.5	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je zilustrować przykładami i potrafi podać idee dowodów podstawowych twierdzeń przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na przynajmniej jedno z wylosowanych trzech zagadnień.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, podawać przykłady i kontrprzykłady ilustrujące te twierdzenia, zna dowody podstawowych twierdzeń oraz ich zastosowania przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na dwa z wylosowanych trzech zagadnień.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, ilustrować je przykładami, zna idee dowodów wszystkich twierdzeń oraz pełne dowody podstawowych przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na wszystkie trzy wylosowane zagadnienia.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi w sposób bezbłędny formułować twierdzenia, podawać przykłady oraz prezentować pełne dowody wszystkich twierdzeń przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student rozumiejąc zależności między poznanymi pojęciami, definicjami i twierdzeniami potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na wszystkie trzy wylosowane zagadnienia i na dodatkowe pytania związane z wylosowanymi zagadnieniami.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 2.0	Student nie wykazał umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student w dostatecznym stopniu potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału oraz uzyskał przy tym więcej niż połowę maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je uzasadnić oraz uzyskał przy tym więcej niż 60% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 70% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 80% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi bezbłędnie wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 90% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.

EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie wykazał wiedzy o której mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, tzn. potrafi ze zrozumieniem podawać definicje, twierdzenia i przykłady przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia z podanej listy.
NA OCENĘ 3.5	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je zilustrować przykładami i potrafi podać idee dowodów podstawowych twierdzeń przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na przynajmniej jedno z wylosowanych trzech zagadnień.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, podawać przykłady i kontrprzykłady ilustrujące te twierdzenia, zna dowody podstawowych twierdzeń oraz ich zastosowania przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na dwa z wylosowanych trzech zagadnień.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, ilustrować je przykładami, zna idee dowodów wszystkich twierdzeń oraz pełne dowody podstawowych przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na wszystkie trzy wylosowane zagadnienia.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi w sposób bezbłędny formułować twierdzenia, podawać przykłady oraz prezentować pełne dowody wszystkich twierdzeń przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student rozumiejąc zależności między poznanymi pojęciami, definicjami i twierdzeniami potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na wszystkie trzy wylosowane zagadnienia i na dodatkowe pytania związane z wylosowanymi zagadnieniami.
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 2.0	Student nie wykazał umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student w dostatecznym stopniu potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału oraz uzyskał przy tym więcej niż połowę maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je uzasadnić oraz uzyskał przy tym więcej niż 60% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 70% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać precyzyjne, ściśle uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 80% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.



NA OCENĘ 5.0	Student potrafi bezbłędnie wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 90% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
--------------	--

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_U05 K_U07	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 W12 W13 W14 W15 C1 C2 C3 C4 C5	N1 N2	P1 P2 P3
EK2	K_U05 K_U07	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 W12 W13 W14 W15 C6 C7 C8 C9 C10 C11 C12 C13 C14 C15	N2 N3 N4	F1 F2 P3
EK3	K_U05	Cel 2	W16 W17 W18 W19 W20 W21 W22 W23 W24 C16 C17 C18 C19	N1 N3	P1 P2 P3
EK4	K_U05	Cel 2	W16 W17 W18 W19 W20 W21 W22 W23 W24 C20 C21 C22 C23 C24	N2 N3	F1 F2 P3

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | W. Kołodziej — *Analiza Matematyczna*, Warszawa, 1983, PWN
- [2] | L. M. Drużkowski — *Analiza Matematyczna dla Fizyków*, Kraków, 1997, Wyd. UJ

[3 ] **W. Stankiewicz** — *Zadania z Matematyki dla Wyższych Uczelni*, Warszawa, 1983, PWN

#### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

[1 ] **M. Spivak** — *Analiza Matematyczna na Rozmaitościach*, Warszawa, 1977, PWN

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr hab. Ihor Mykytyuk (kontakt: imykytyuk@pk.edu.pl)

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr hab. Ihor Mykytyuk (kontakt: imykytyuk@pk.edu.pl)

2 dr Mariusz Jużyniec (kontakt: juzyniec@pk.edu.pl)

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

**PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI** (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....

.....