

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2019/2020

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Modelowanie matematyczne

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Algebra liniowa z geometrią analityczną II
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	Linear algebra with the analitic geometry II
KOD PRZEDMIOTU	WiT M oIS B4 19/20
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty podstawowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	8.00
SEMESTRY	2

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
2	45	45	0	0	0	0

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Nauczyć studentów podstawowych metod algebraicznych i geometrycznych niezbędnych w analizie, równaniach różniczkowych, teorii prawdopodobieństwa itd., aktywnie stosowanych we współczesnej ekonomii, finansach, kryptografii, kodowaniu itd.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Matematyka na poziomie szkolnym zaawansowanym oraz zaliczenie pierwszego semestru

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia stosujące się struktury przekształceń liniowych, przestrzeni afinicznych, operatorów liniowych i ich macierzy, przestrzeni z iloczynem skalarnym i przestrzeni afinicznych

**EK2 Umiejętności** Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia stosujące się struktury przekształceń liniowych, przestrzeni afinicznych, operatorów liniowych i ich macierzy, przestrzeni z iloczynem skalarnym i przestrzeni afinicznych, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać zadania z tej dziedziny

**EK3 Wiedza** Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia stosujące się form dwuliniowych i kwadratowych oraz algebry wieloliniowej

**EK4 Kompetencje społeczne** Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia stosujące się form dwuliniowych i kwadratowych oraz algebry wieloliniowej, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać zadania z tej dziedziny, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formować opinie na temat podstawowych zagadnień

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
W1	Struktury przekształceń liniowych: wartości i wektory własne endomorfizmu (macierzy), podprzestrzenie własne, wielomian charakterystyczny. Diagonalizacja macierzy. Podprzestrzenie niezmiennicze. Twierdzenie Hamiltona-Cayleya. Klatka Jordana, postać Jordana macierzy	10
W2	Przestrzenie afiniczne: wektory swobodne i zaczepione. Podprzestrzenie afiniczne. Współrzędne punktów i płaszczyzn. Równania prostej i płaszczyzny, wzajemne położenia prostych i płaszczyzn	5
W3	Przestrzenie z iloczynem skalarnym: iloczyn skalarny, definicje przestrzeni euklidesowej i przestrzeni unitarnej. Długość wektora, kąt między wektorami, odległość punktu od prostej i płaszczyzny. Iloczyn wektorowy i jego zastosowanie. Baza ortogonalna, proces ortogonalizacji Grama-Schmidta. Dopełnienie ortogonalne. Izomorfizm przestrzeni euklidesowej i przestrzeni dualnej.	10
W4	Operatory liniowe i ich macierze: Operator sprzężony. Operator normalny. Operator samosprzężony. Operatory i macierze ortogonalne. Grupy liniowe, grupy izometrii, grupy podobieństw	8
W5	Formy dwuliniowe i kwadratowe: formy dwuliniowe, ich macierze, transformacja macierzy przy zmianie bazy. Formy kwadratowe, formy biegunowe. Przekształcenie form kwadratowych do postaci kanonicznej (metodą Lagrangea i za pomocą przekształceń ortogonalnych). Krzywe algebraiczne i powierzchnie drugiego stopnia. Formy nieujemne (dodatnie) określone. Twierdzenie Sylwestera.	8

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W6</b>	Algebra wieloliniowa: odwzorowania i formy wieloliniowe. Określenie iloczynów tensorowych przestrzeni liniowej, istnienie, wymiar, iloczyn tensorowy, przemienność, łączność, uniwersalność. Tensory, symetryczność, antysymetria. Współrzędne tensora w bazie. Algebra zewnętrzna, bazy potęg zewnętrznych	4

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>C1</b>	Stryktura przekształceń liniowych: obliczanie wartości własnych, wektorów własnych i podprzestrzeni własnych, sprowadzenie macierzy do postaci schodkowej, sprowadzenie macierzy do postaci Jordana	10
<b>C2</b>	Przestrzenie afiniczne: obliczanie współrzędnych afinicznych punktów w różnych układach współrzędnych, wyznaczenie równań prostych i płaszczyzn, badanie wzajemnego położenia prostych i płaszczyzn	5
<b>C3</b>	Przestrzenie z iloczynem skalarnym: zastosowanie iloczynu skalarnego i iloczynu wektorowego. Obliczanie odległości punktu od prostej i płaszczyzny, kątów między prostymi i płaszczyznami. Ortogonalizacja bazy przestrzeni liniowej metodą Grama-Schmidta. Relacja między algebraicznym i geometrycznym opisem przekształceń i zbiorów algebraicznych pierwszego stopnia.	10
<b>C4</b>	Operatory liniowe i ich macierze: Obliczanie macierzy operatorów liniowych i ich diagonalizacja. Zastosowanie grup izometrii, grup podobieństw	8
<b>C5</b>	Formy dwuliniowe i kwadratowe: wyznaczenie macierzy formy dwuliniowej i formy kwadratowej. Sprowadzanie form kwadratowych do postaci kanonicznej (metodą Lagrange'a i za pomocą przekształceń ortogonalnych), sprowadzanie krzywych i powierzchni stopnia 2 do postaci kanonicznej (za pomocą przekształceń ortogonalnych)	8
<b>C6</b>	Algebra wieloliniowa: badanie własności odwzorowań wieloliniowych, badanie własności iloczynu tensorowego, zastosowanie tensorów. Wyznaczenie współrzędnych tensora w bazie, wyznaczenie iloczynu tensorowego macierzy. Własności iloczynu zewnętrznego, obliczanie potęgi zewnętrznej macierzy	4

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

**N1** Wykłady. W sytuacji zdalnego nauczania prowadzone są za pośrednictwem MS Teams. e-kur na platformie Delta PK.

**N2** Konsultacje

**N3** Dyskusja

**N4** Praca w grupach. W sytuacji zdalnego nauczania prowadzone są za pośrednictwem MS Teams.

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
<b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>	
Godziny wynikające z planu studiów	90
Konsultacje przedmiotowe	0
Egzaminy i zaliczenia w sesji	0
<b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b>	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	150
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
<b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>	<b>240</b>
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	8.00

## 9 SPOSOBY OCENY

Aktywność w e-kursie umieszczonym na platformie Delta PK. W sytuacji zdalnego nauczania wszystkie sprawdziany prowadzone są za pośrednictwem platformy Delta PK i MS Teams.

### OCENA FORMUJĄCA

F1 Kolokwium

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

P1 Zaliczenie pisemne

P2 Egzamin pisemny

P3 Egzamin ustny

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

W1 Do egzaminu mogą przystąpić studenci, którzy zaliczyli ćwiczenia

W2 Egzamin pisemny składa się z części zadaniowej i teoretycznej

W3 Ocena końcowa jest sumą ocen P1, P2 i P3

### KRYTERIA OCENY

EFEKT KSZTAŁCENIA 1
---------------------

NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, lecz również zilustrować ich przykładami
NA OCENĘ 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, może ich udowodnić i zilustrować przykładami, rozwiązuje podstawowe zadania
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym i ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym i ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, nie potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać elementarne zadania

NA OCENĘ 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, może ich udowodnić, zilustrować przykładami oraz rozwiązać zadania teoretycznego i praktycznego charakteru
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, nie potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej i ilustruje ich przykładami
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, lecz również zilustrować ich przykładami
NA OCENĘ 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, może ich udowodnić i zilustrować przykładami oraz rozwiązać zadanie teoretycznego i praktycznego charakteru
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań praktycznego i teoretycznego charakteru
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	

NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, nie potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, nie potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, nie potrafi formować opinie na temat podstawowych zagadnień
NA OCENĘ 3.0	Student zna o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formować opinie na temat podstawowych zagadnień
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać elementarne zadania, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formować opinie na temat podstawowych zagadnień
NA OCENĘ 4.0	Student formułuje podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, może ich udowodnić, zilustrować przykładami oraz rozwiązać standardowe zadania, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formować opinie na temat podstawowych zagadnień
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formować opinie na temat podstawowych zagadnień
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formować opinie na temat podstawowych zagadnień

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W01 K_W02 K_W03 K_W04	Cel 1	W1 W2 W3 C1 C2 C3	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3
EK2	K_U01 K_U02 K_U03 K_U04	Cel 1	W4 C4	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3
EK3	K_W01 K_W02 K_W03 K_W04 K_W05 K_W06 K_W07	Cel 1	W3 W5 C5	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3
EK4	K_K01 K_K02 K_K03 K_K04 K_K05 K_K06 K_K07	Cel 1	W6 C6	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | **A. Piękosz** — *Algebra liniowa*, Kraków, 2009, PK
- [2] | **A.I. Kostrikin** — *Wstęp do algebry (cz 1,2)*, Warszawa, 2004, PWN
- [3] | **J. Rutkowski** — *Algebra liniowa w zadaniach*, Warszawa, 2010, PWN
- [4] | **J. Gancarzewicz** — *Algebra liniowa i jej zastosowania*, Kraków, 2004, UJ
- [5] | **G. Banaszak, W. Gajda** — *Elementy algebry liniowej (cz 1,2)*, Warszawa, 2002, WNT

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] | **A. Białyński-Birula** — *Algebra liniowa z geometrią*, Warszawa, 1976, PWN
- [2] | **F. Leja** — *Geometria analityczna*, Warszawa, 1972, PWN
- [3] | **J. Gancarzewicz** — *Arytmetyka*, Kraków, 2002, UJ
- [4] | **P. Kajetanowicz, J. Wierzejewski** — *Algebra z geometrią analityczną*, Warszawa, 2008, PWN
- [5] | **J. Klukowska, I. Nabiałek** — *Algebra dla studentów*, Warszawa, 1999, WNT

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

prof. dr hab. Orest Artemowych (kontakt: [artemo@pk.edu.pl](mailto:artemo@pk.edu.pl))



### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

- 1 Prof. dr hab. Orest Artemowych (kontakt: [artemo@usk.pk.edu.pl](mailto:artemo@usk.pk.edu.pl))
- 2 Dr Marcin Skrzyński (kontakt: [pfskrzyn@cyfronet.pl](mailto:pfskrzyn@cyfronet.pl))
- 3 Dr Kamil Kular (kontakt: [kamil\\_kular@wp.pl](mailto:kamil_kular@wp.pl))

### 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

**PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI** (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....  
.....  
.....