

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2019/2020

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Modelowanie matematyczne

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Algebra liniowa z geometrią analityczną I
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	Linear algebra with the analitic geometry
KOD PRZEDMIOTU	WiT M oIS B3 19/20
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty podstawowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	8.00
SEMESTRY	1

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
1	45	45	0	0	0	0

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Nauczyć studentów podstawowych metod algebraicznych i geometrycznych niezbędnych w analizie, równaniach różniczkowych, teorii prawdopodobieństwa itd., aktywnie stosowanych we współczesnej ekonomii, finansach, kryptografii, kodowaniu itd.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Matematyka na poziomie szkolnym zaawansowanym

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia stosujące się struktur algebraicznych i w szczególności przestrzeni liniowych (w tym, liniowej zależności i liniowej niezależności, bazy, wymiaru przestrzeni, operacji na podprzestrzeniach, własności macierzy i odwzorowań liniowych, izomorfizmów przestrzeni liniowych)

**EK2 Umiejętności** Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia stosujące się struktur algebraicznych i w szczególności przestrzeni liniowych, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać podstawowe ćwiczenia z tej dziedziny

**EK3 Wiedza** Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia stosujące się wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać podstawowe ćwiczenia z tej dziedziny

**EK4 Kompetencje społeczne** Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia stosujące się algebry liniowej i geometrii analitycznej, lecz potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, potrafi formułować opinie na temat podstawowych zagadnień

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
W1	Struktury algebraiczne: działania algebraiczne i ich własności (przemienność, łączność, rozdzielność, neutralność, odwrotność), grupy abelowe i nieprzemienne, prawa skracania i potęgowania. Grupy przekształceń, grupy permutacji (cykle, transpozycji, transpozycji liczb sąsiednich, inwersje, parzystość). Podgrupy, podgrupy normalne, grupy ilorazowe. Pierścienie, podpierścienie, ideały. Pierścień klas reszt modulo $n$ . Ciała przemienne i nieprzemienne, podciała	5
W2	Ciało liczb zespolonych: definicja ciała $C$ , postaci kanoniczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej. Wzór de Moivre'a, pierwiastkowanie liczb zespolonych, interpretacja geometryczna. Ciało kwaternionów.	5
W3	Pierścień wielomianów: dzielenie z resztą, algorytm Euklidesa, NWD, NWW. Dzielniki wielomianów, wielomiany nieprzywiedlne w ciele. Rozkład wielomianów w iloczyn czynników nieprzywiedlnych w ciele. Pierwiastki wielomianu, twierdzenie Bezouta. Krotność pierwiastku wielomianu. Wzór Taylora, wzory Vietea, schemat Hornera. Zasadnicze twierdzenie algebry, postać kanoniczna wielomianu. Wielomiany zespolone i wielomiany rzeczywiste. Ciało ułamków (funkcje wymierne, ułamki proste)	6
W4	Przestrzenie liniowe: definicja i własności przestrzeni liniowych. Podprzestrzenie i przestrzenie ilorazowe. Kombinacja liniowa, liniowa niezależność, liniowa zależność. Baza i wymiar przestrzeni liniowej. Operacje na podprzestrzeniach (suma, przekrój, suma prosta). Wymiar sumy podprzestrzeni i wymiar przestrzeni ilorazowej, izomorfizmy przestrzeni liniowych	9

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W5</b>	Macierze i odwzorowania liniowe: definicja macierzy, rodzaje macierzy, działania na macierzach. Przekształcenie liniowe, jego macierz, jądro, obraz, rząd odwzorowania liniowego. Operatory liniowe, homomorfizmy i izomorfizmy. Macierz przejścia i transformacja współrzędnych wektora przy zmianie bazy. Transformacja macierzy odwzorowania liniowego przy zmianie bazy. Podobieństwo macierzy.	10
<b>W6</b>	Wyznaczniki i układy równań liniowych: definicja wyznacznika, własności, minory, dopełnienie algebraiczne. Wyznacznik iloczynu macierzy. Rozwinięcie Laplacea. Macierz odwrotna. Układy równań liniowych (jednorodny i niejednorodny). Układy Cramera. Rząd macierzy. Twierdzenie Kroneckera-Capellego. Metoda eliminacji Gaussa	10

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>C1</b>	Struktury algebraiczne: badanie własności działań, rozpoznawanie struktur algebraicznych, własności permutacji. Rozpoznanie podgrup, podpierścieni, podciała. Rozpoznanie homomorfizmów i izomorfizmów. Klasy reszt i elementarne obliczenia w arytmetyce modularnej	7
<b>C2</b>	Ciało liczb zespolonych: postać algebraiczna, postać trygonometryczna, postać wykładnicza. Interpretacja geometryczna, rozwiązywanie równań. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb zespolonych	6
<b>C3</b>	Pierścień wielomianów: dzielenie z resztą, algorytm Euklidesa, NWD, NWW. Rozpoznawanie wielomianów nieprzywiedlnych w ciele, rozkładanie wielomianów na czynniki nieprzywiedlne. Pierwiastki jednokrotne i wielokrotne, zastosowanie twierdzenia Bezouta i zasadniczego twierdzenia algebry. Wzór Taylora, wzory Vietea i schemat Hornera	8
<b>C4</b>	Przestrzeni liniowe: rozpoznawanie przestrzeni i podprzestrzeni. Badanie liniowej zależności i liniowej niezależności układów wektorów. Wyznaczenie bazy i wymiarów przestrzeni liniowej. Baza sumy i przekroju podprzestrzeni	8
<b>C5</b>	Macierze i odwzorowania liniowe: działania na macierzach. Rozpoznawanie przekształceń liniowych, wyznaczenie ich jądra i obrazu, obliczenie ich macierzy, rzędu. Obliczanie macierzy przejścia przy zmianie bazy i znajdowanie współrzędnych wektora w różnych bazach.	8
<b>C6</b>	Wyznaczniki i układy równań liniowych: różne sposoby obliczania wyznaczników, obliczanie rzędu macierzy. Odwracanie macierzy. Rozwiązywanie układów równań liniowych (jednorodnych i niejednorodnych), układów Cramera.	8

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady

N2 Konsultacje

N3 Dyskusja

N4 Praca w grupach

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
<b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>	
Godziny wynikające z planu studiów	90
Konsultacje przedmiotowe	0
Egzaminy i zaliczenia w sesji	0
<b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b>	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	150
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
<b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>	<b>240</b>
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	8.00

## 9 SPOSOBY OCENY

### OCENA FORMUJĄCA

F1 Kolokwium

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

P1 Zaliczenie pisemne

P2 Egzamin pisemny

P3 Egzamin ustny

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

W1 Do egzaminu mogą przystąpić studenci, którzy zaliczyli ćwiczenia

W2 Egzamin pisemny składa się z części zadaniowej i teoretycznej

W3 Ocena końcowa jest sumą ocen P1, P2 i P3

**KRYTERIA OCENY**

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych i ilustruje ich przykładami
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych, lecz również zilustrować ich przykładami
NA OCENĘ 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych, może ich udowodnić i zilustrować przykładami
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturach algebraicznych, macierzach i odwzorowaniach liniowych liczbach zespolonych i ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych, nie może rozwiązać elementarnych zadań
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych, ilustruje ich przykładami i rozwiązuje elementarne zadania
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać elementarne zadania
NA OCENĘ 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych, może ich udowodnić, zilustrować przykładami oraz rozwiązać zadania teoretycznego i praktycznego charakteru

NA OCENĘ 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturach algebraicznych i, w szczególności, o przestrzeniach liniowych, macierzach i odwzorowaniach liniowych oraz liczbach zespolonych, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych, ilustruje ich przykładami, rozwiązuje zadania elementarne
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać zadanie elementarne
NA OCENĘ 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych, może ich udowodnić i zilustrować przykładami oraz rozwiązać zadanie teoretycznego i praktycznego charakteru
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o wielomianach, wyznacznikach i układach równań liniowych, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania różnych standardowych zadań
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o wielomianach, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań praktycznego i teoretycznego charakteru
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych i nie może rozwiązać elementarnych zadań, nie potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, nie potrafi formułować opinii na temat podstawowych zagadnień
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych, ilustruje ich przykładami i rozwiązuje elementarne zadania, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, potrafi formułować opinie na temat podstawowych zagadnień
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać elementarne zadania, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, potrafi formułować opinie na temat podstawowych zagadnień

NA OCENĘ 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych, może ich udowodnić, zilustrować przykładami oraz rozwiązać zadania, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, potrafi formułować opinie na temat podstawowych zagadnień
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, potrafi formułować opinie na temat podstawowych zagadnień
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o wielomianach, wyznacznikach, układach równań liniowych, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, potrafi formułować opinie na temat podstawowych zagadnień

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓLOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W01 K_W02 K_W03 K_W04	Cel 1	W1 W2	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3
EK2	K_U01 K_U02 K_U03 K_U04	Cel 1	W3 C3	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3
EK3	K_W01 K_W02 K_W03 K_W04 K_W05	Cel 1	W5 C5	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3
EK4	K_K01 K_K02 K_K03 K_K04 K_K05 K_K06 K_K07	Cel 1	W6 C6	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1 ] **A. Piękosz** — *Algebra liniowa*, Kraków, 2009, PK
- [2 ] **J. Klukowska, I. Nabiałek** — *Algebra dla studentów*, Warszawa, 1999, PWN
- [3 ] **A.I. Kostrikin** — *Wstęp do algebry (cz 1,2)*, Warszawa, 2004, PWN
- [4 ] **J. Rutkowski** — *Algebra liniowa w zadaniach*, Warszawa, 2010, PWN
- [5 ] **J. Rutkowski** — *Algebra abstrakcyjna w zadaniach*, Warszawa, 2001, PWN
- [6 ] **S. Przybyło, A. Szlachtowski** — *Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach*, Warszawa, 1988, PWN

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1 ] **J. Gancarzewicz** — *Algebra liniowa i jej zastosowania*, Kraków, 2004, UJ
- [2 ] **A. Białyński-Birula** — *Algebra liniowa z geometrią*, Warszawa, 1976, PWN
- [3 ] **F. Leja** — *Geometria analityczna*, Warszawa, 1972, PWN
- [4 ] **J. Gancarzewicz** — *Arytmetyka*, Kraków, 2002, UJ
- [5 ] **P. Kajetanowicz, J. Wierzejewski** — *Algebra z geometrią analityczną*, Warszawa, 2008, PWN

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

prof. dr hab. Orest Artemowych (kontakt: [artemo@pk.edu.pl](mailto:artemo@pk.edu.pl))

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 Prof. dr hab. Orest Artemowych (kontakt: [artemo@usk.pk.edu.pl](mailto:artemo@usk.pk.edu.pl))

2 Dr Marcin Skrzyński (kontakt: [pfskrzyn@cyfronet.pl](mailto:pfskrzyn@cyfronet.pl))

3 Dr Kamil Kular (kontakt: [kamil\\_kular@wp.pl](mailto:kamil_kular@wp.pl))

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....  
.....  
.....