

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2015/2016

Wydział Inżynierii i Technologii Chemicznej

Kierunek studiów: Inżynieria Chemiczna i Procesowa

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: I

Stopień studiów: II

Specjalności: Inżynieria Odnawialnych Źródeł Energii, Inżynieria Procesów Technologicznych

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	SI-2 Rachunek wariacyjny
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	
KOD PRZEDMIOTU	WITCh ICHIP oIIS B2 15/16
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty podstawowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	2.00
SEMESTRY	2

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁADY	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	PROJEKT	SEMINARIUM
2	0	0	0	0	0	30

### 3 CELE PRZEDMIOTU

Cel 1 Zaznajomienie studentów z problematyką znajdowania ekstremów funkcji wielu zmiennych oraz ekstremal funkcjonalów całkowitych.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Zaliczenie dwóch semestrów przedmiotu Matematyka.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Znajomość definicji i twierdzeń dotyczących rachunku różniczkowego funkcji wielu zmiennych: pochodna, pochodne cząstkowe, twierdzenie Taylora, przechodzenie go granicy pod znakiem całki, różniczkowanie pod znakiem całki. Warunek wystarczający na określoność form kwadratowych. Warunku konieczny i wystarczający istnienia ekstremum funkcji wielu zmiennych

**EK2 Wiedza** Znajomość definicji i twierdzeń dotyczących przestrzeni funkcyjnych używanych w zagadnieniach rachunku wariacyjnego.

**EK3 Wiedza** Znajomość definicji ekstremów funkcjonału i twierdzeń dotyczących warunków koniecznych i warunków wystarczających na istnienia ekstremum funkcjonału całkowego.

**EK4 Umiejętności** Wyznaczanie ekstremów funkcji wielu zmiennych, potencjalnych ekstremal i jeśli to wykonalne sprawdzanie warunku wystarczającego na istnienia ekstremum funkcjonału całkowego.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

SEMINARIUM		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
S1	Ekstrema funkcji jednej i wielu zmiennych. Przykłady. Heurystyczne wprowadzenie do rachunku wariacyjnego. Kilka podstawowych przykładów. Pojęcie funkcjonału, ekstrema słabe i mocne. Przykłady.	4
S2	Lemat Lagrangea, równanie Eulera jako warunek konieczny na ekstremum funkcjonału. Twierdzenie Hilberta o regularności ekstremal. Przykłady.	8
S3	Zagadnienia wariacyjne dla układów funkcji. Zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów. Zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych. Zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami. Zagadnienie Bolzy. Przykłady.	6
S4	Zagadnienia wariacyjne z więzami. Zagadnienia izoperymetryczne, metoda mnożników Lagrangea. Zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi. Przykłady.	6
S5	Warunki wystarczające na ekstremum. Przykłady.	6

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady

N2 Prezentacje multimedialne

N3 Dyskusja

N4 Zadania tablicowe

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
<b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>	
Godziny wynikające z planu studiów	30
Konsultacje przedmiotowe	0
Egzaminy i zaliczenia w sesji	0
<b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b>	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	0
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
<b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>	<b>30</b>
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	2.00

## 9 SPOSOBY OCENY

### OCENA FORMUJĄCA

F1 Test

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

P1 Test

### KRYTERIA OCENY

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 3.0	Student zna definicję ekstremów lokalnych i twierdzenia dotyczące warunku koniecznego i warunku wystarczającego istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych.
NA OCENĘ 3.5	Student zna definicję ekstremów lokalnych i twierdzenia dotyczące warunku koniecznego i warunku wystarczającego istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych. Student umie uzasadnić warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych.

NA OCENĘ 4.0	Student zna definicję ekstremów lokalnych i twierdzenia dotyczące warunku koniecznego i warunku wystarczającego istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych. Student umie uzasadnić warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych oraz wyjaśnić jego związek z pierwszą pochodną.
NA OCENĘ 4.5	Student zna definicję ekstremów lokalnych i twierdzenia dotyczące warunku koniecznego i warunku wystarczającego istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych. Student umie uzasadnić warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych oraz wyjaśnić jego związek z pierwszą pochodną. Ponadto powołuje się na twierdzenie Taylora przy uzasadnianiu warunku wystarczającego.
NA OCENĘ 5.0	Student zna definicję ekstremów lokalnych i twierdzenia dotyczące warunku koniecznego i warunku wystarczającego istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych. Student umie uzasadnić warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych oraz wyjaśnić jego związek z pierwszą pochodną. Ponadto powołuje się na twierdzenie Taylora przy uzasadnianiu warunku wystarczającego i wyjaśnia związek z określonością formy kwadratowej.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 3.0	Student zna definicję przestrzeni funkcji ciągłych i przestrzeni funkcji ciągłych wraz z pochodną na przedziale oraz definicję normy w tych przestrzeniach.
NA OCENĘ 3.5	Student zna definicję przestrzeni funkcji ciągłych i przestrzeni funkcji ciągłych wraz z pochodną na przedziale oraz definicję normy w tych przestrzeniach. Student zna definicję przestrzeni funkcji ciągłych o umocowanych końcach i przestrzeni funkcji o umocowanych końcach ciągłych wraz z pochodną na przedziale oraz definicję metryki w tych przestrzeniach.
NA OCENĘ 4.0	Student zna definicję przestrzeni funkcji ciągłych i przestrzeni funkcji ciągłych wraz z pochodną na przedziale oraz definicję normy w tych przestrzeniach. Student zna definicję przestrzeni funkcji ciągłych o umocowanych końcach i przestrzeni funkcji o umocowanych końcach ciągłych wraz z pochodną na przedziale oraz definicję metryki w tych przestrzeniach. Wyjaśnia rodzaj zbieżności w tych przestrzeniach.
NA OCENĘ 4.5	Student zna definicję przestrzeni funkcji ciągłych i przestrzeni funkcji ciągłych wraz z pochodną na przedziale oraz definicję normy w tych przestrzeniach. Student zna definicję przestrzeni funkcji ciągłych o umocowanych końcach i przestrzeni funkcji o umocowanych końcach ciągłych wraz z pochodną na przedziale oraz definicję metryki w tych przestrzeniach. Wyjaśnia rodzaj zbieżności w tych przestrzeniach. Pokazuje zawieranie między kulami.
NA OCENĘ 5.0	Student zna definicję przestrzeni funkcji ciągłych i przestrzeni funkcji ciągłych wraz z pochodną na przedziale oraz definicję normy w tych przestrzeniach. Student zna definicję przestrzeni funkcji ciągłych o umocowanych końcach i przestrzeni funkcji o umocowanych końcach ciągłych wraz z pochodną na przedziale oraz definicję metryki w tych przestrzeniach. Wyjaśnia rodzaj zbieżności w tych przestrzeniach. Pokazuje zawieranie między kulami i wyjaśnia jego konsekwencje.
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	

NA OCENĘ 3.0	Student prezentuje równanie Eulera jako warunek konieczny na ekstremum funkcjonału i przedstawia ideę uzasadnienia. Dodatkowo omawia jeden z poniższych tematów : zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.
NA OCENĘ 3.5	Student prezentuje równanie Eulera jako warunek konieczny na ekstremum funkcjonału i przedstawia ideę uzasadnienia. Dodatkowo omawia dwa z poniższych tematów: zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.
NA OCENĘ 4.0	Student prezentuje równanie Eulera jako warunek konieczny na ekstremum funkcjonału i przedstawia ideę uzasadnienia. Dodatkowo omawia trzy z poniższych tematów: zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.
NA OCENĘ 4.5	Student prezentuje równanie Eulera jako warunek konieczny na ekstremum funkcjonału i przedstawia ideę uzasadnienia. Dodatkowo omawia cztery z poniższych tematów: zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.
NA OCENĘ 5.0	Student prezentuje równanie Eulera jako warunek konieczny na ekstremum funkcjonału i przedstawia ideę uzasadnienia. Dodatkowo omawia pięć z poniższych tematów: zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 3.0	Student wyznacza ekstrema funkcji wielu zmiennych i określa ich charakter. Student zapisuje równanie Eulera i wyznacza ekstremale funkcjonału w najprostszych przypadkach. Ponadto rozwiązuje przykład dotyczący jednego z zaawansowanych zagadnień: zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.

NA OCENĘ 3.5	Student wyznacza ekstrema funkcji wielu zmiennych i określa ich charakter. Student zapisuje równanie Eulera i wyznacza ekstremale funkcjonału w najprostszych przypadkach. Ponadto rozwiązuje dwa przykłady dotyczące zaawansowanych zagadnień: zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.
NA OCENĘ 4.0	Student wyznacza ekstrema funkcji wielu zmiennych i określa ich charakter. Student zapisuje równanie Eulera i wyznacza ekstremale funkcjonału w najprostszych przypadkach. Ponadto rozwiązuje trzy przykłady dotyczące zaawansowanych zagadnień: zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.
NA OCENĘ 4.5	Student wyznacza ekstrema funkcji wielu zmiennych i określa ich charakter. Student zapisuje równanie Eulera i wyznacza ekstremale funkcjonału w najprostszych przypadkach. Ponadto rozwiązuje cztery przykłady dotyczące zaawansowanych zagadnień: zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.
NA OCENĘ 5.0	Student wyznacza ekstrema funkcji wielu zmiennych i określa ich charakter. Student zapisuje równanie Eulera i wyznacza ekstremale funkcjonału w najprostszych przypadkach. Ponadto rozwiązuje pięć przykładów dotyczących zaawansowanych zagadnień: zagadnienia wariacyjne z pochodnymi wyższych rzędów, zagadnienia wariacyjne dla funkcji wielu zmiennych, zagadnienia wariacyjne z ruchomymi końcami, zagadnienie Bolzy, zagadnienia wariacyjne z więzami, zagadnienia izoperymetryczne, zagadnienia wariacyjne z ekstremami warunkowymi, warunki wystarczające na ekstremum funkcjonału.

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1		Cel 1	S1	N1 N2	F1 P1
EK2		Cel 1	S2 S3 S4	N1 N2 N3	F1 P1
EK3		Cel 1	S3 S4 S5	N1 N2 N3	F1 P1

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓLOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK4		Cel 1	S1 S2 S3 S4 S5	N1 N2 N3 N4	F1 P1

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1 ] I.M. Gelfand S.W, Fomin — *Rachunek Wariacyjny*, Warszawa, 1970, PWN
- [2 ] J. Muszynski — *Równania różniczkowe zwyczajne i elementy rachunku wariacyjnego*, Warszawa, 2003, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1 ] W. Kołodziej — *Wybrane rozdziały analizy matematycznej*, Warszawa, 1970, PWN

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Witold Obłóza (kontakt: obloza@pk.edu.pl)

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr Witold Obłóza (kontakt: obloza@pk.edu.pl)

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....