

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2015/2016

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: II

Specjalności: Matematyka w finansach i ekonomii

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Analiza matematyczna
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	
KOD PRZEDMIOTU	WFMiI M oIIS B1 15/16
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty podstawowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	10.00
SEMESTRY	1

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
1	60	60	0	0	0	0

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Zapoznanie studentów z podstawowymi faktami teorii miary i całki Lebesgue'a; przestrzeń  $L_p$ .

**Cel 2** Formy różniczkowe oraz ich całkowanie.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Zaliczony pierwszy stopień studiów matematycznych.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student poznaje podstawy teorii miary, miary i całki Lebesgue'a i przestrzenie  $L_p$ .

**EK2 Umiejętności** Student potrafi sprawdzać czy dane odwzorowanie jest miarą, mierzalność zbiorów i funkcji, stosować twierdzenie Fubiniego i twierdzenie o zmianie zmiennych. Student umie stosować poznane fakty do obliczania całek wielokrotnych, całek z form różniczkowych i uzasadniać poprawność wykonywanych operacji.

**EK3 Wiedza** Student poznaje formy różniczkowe, działania na formach i ich własności oraz ich całkowanie na podrozmiarowościach  $R_n$ .

**EK4 Umiejętności** Student potrafi wykonywać podstawowe działania na formach różniczkowych, obliczać całki z form różniczkowych na podrozmiarowościach  $R_n$  (szczególnie całki krzywoliniowe i powierzchniowe) oraz znać ich zastosowania.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C1	Sprawdzanie czy dana rodzina jest sigma-ciałem, wyznaczanie własności sumy, przecięcia sigma -ciał, pierścienie, sigma-pierścienie, ciała podzbiorów danego zbioru	2
C2	Sprawdzanie czy dana funkcja jest miarą, wykorzystanie własności miary przy dowodzeniu własności nie podanych na wykładzie, miary liczące, atomowe	3
C3	Sprawdzanie czy dana funkcja jest miarą zewnętrzną, konstruowanie miar przy pomocy twierdzenia Caratheodoryego, zupełność	3
C4	Wykazywanie własności m-wymiarowa miary zewnętrznej Lebesguea, zbiór Cantora, zbiór Vitaliego	2
C5	Sprawdzanie mierzalności funkcji względem danego sigma-ciała, konstruowanie sigma-ciał generowanych przez funkcje	2
C6	Działania na funkcjach mierzalnych	2
C7	Przypomnienie wiadomości o szeregach liczbowych, całkowanie funkcji prostej nieujemnej, całka funkcji Dirichleta, całka funkcji skokowej Heavisidea, własności całki funkcji prostej	4
C8	Całkowanie funkcji mierzalnej nieujemnej, konstruowanie ciągu aproksymującego funkcję mierzalną nieujemną w przypadku przestrzeni ciągów oraz przestrzeni funkcji rzeczywistych	3
C9	Badanie całkowalności funkcji, wykorzystanie warunku koniecznego na całkowalność oraz warunku wystarczającego	2

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C10	Zastosowanie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, zastosowanie lematu Fatou	2
C11	Całka Lebesguea	2
C12	Zastosowanie twierdzenia Lebesguea o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki	2
C13	Wykorzystanie związku całki Riemanna z całką Lebesguea, wykorzystanie sum całkowych Riemanna do wyznaczania sum szeregów, wykorzystanie zasady Cavalieriego, geometryczna interpretacja całki funkcji nieujemnej	2
C14	Zastosowania twierdzeń: Tonellygo i Fubinięgo	2
C15	Zamiana zmiennych w całce Lebesguea	2
C16	Przypomnienie własności odwzorowań liniowych i wieloliniowych, sprawdzanie czy dane odwzorowanie jest p-liniowe znakozmienne, struktura przestrzeni $A_p(E;F)$ , mnożenie zewnętrzne odwzorowań wieloliniowych znakozmiennych i wykorzystanie jego własności, obliczanie iloczynu zewnętrznego k-form liniowych, wyznaczanie bazy przestrzeni $A_p(R^k; R)$ , wykorzystanie domkniętości przestrzeni $A_p(R^k; R)$ , przestrzeń $A_p(R^k; R)$ jako przestrzeń unitarna	2
C17	Sprawdzanie czy dane odwzorowanie jest formą różniczkową, postać kanoniczna	2
C18	Wykonywanie operacji na formach różniczkowych: iloczyn zewnętrzny, różniczka zewnętrzna, zmiana zmiennych w formie różniczkowej	4
C19	Wyznaczanie pierwotnej formy, badanie zamkniętości formy, wykorzystanie twierdzenia Poincarego	2
C20	Przypomnienie definicji łuku, krzywej, podrozmaitości jednowymiarowej, badanie zgodności orientacji krzywej z wyborem parametryzacji, obliczanie całki krzywoliniowej zorientowanej, wykorzystanie niezależności od parametryzacji krzywej, całkowanie formy różniczkowej zamkniętej, cykl, badanie czy krzywe są homotopijne, zbiór p-spójny, obliczanie całki krzywoliniowej zorientowanej jako granicy ciągu sum całkowych, zastosowanie całki krzywoliniowej	3
C21	Podrozmaitości orientowalne, wstęga Möbiusa, sprawdzanie czy dany zbiór jest kompaktem, kompaktem z brzegiem, kompaktem z brzegiem na podrozmaitości, sprawdzanie zgodności orientacji, obliczanie całki formy różniczkowej stopnia drugiego w przestrzeni $R^2$ , zastosowanie twierdzenia Greena-Riemanna, obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej, wykorzystanie własności całki powierzchniowej zorientowanej	3
C22	Obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej, wykorzystanie własności całki powierzchniowej zorientowanej	3
C23	Definicja całki formy różniczkowej stopnia trzeciego w $R^3$ , zastosowania twierdzenia Greena-Gaussa-Ostrogradskiego	3

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>C24</b>	Zastosowania twierdzenia Stokesa, wyznaczanie dywergencji, rotacji, gradientu pola	3

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W1</b>	Definicja sigma ciała - własności i przykłady.	2
<b>W2</b>	Miara i jej własności.	2
<b>W3</b>	Miara zewnętrzna, twierdzenie Caratheodory'ego	3
<b>W4</b>	Miara Lebesgue'a, charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.	3
<b>W5</b>	Funkcje mierzalne, warunki równoważne, przykłady.	2
<b>W6</b>	Działania na funkcjach mierzalnych.	2
<b>W7</b>	Funkcje proste i ich całkowanie, własności całek z funkcji prostych.	4
<b>W8</b>	Funkcje mierzalne nieujemne jako granice rosnących ciągów funkcji prostych, całka z funkcji mierzalnej nieujemnej.	3
<b>W9</b>	Podstawowe własności całek z funkcji mierzalnych nieujemnych.	2
<b>W10</b>	Twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, lemat Fatou.	2
<b>W11</b>	Całka Lebesgue'a, definicja i własności.	2
<b>W12</b>	Twierdzenia Lebesgue'a o monotonicznym i o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.	2
<b>W13</b>	Związek Całki Riemanna z całką Lebesgue'a, zasada Cavalieriego.	2
<b>W14</b>	Twierdzenia: Tonelly'ego i Fubinięgo.	2
<b>W15</b>	Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a.	2
<b>W16</b>	Odwzorowania p-liniowe znakozmienne, działania algebraiczne i iloczyn zewnętrzny, baza przestrzeni odwzorowań p-liniowych znakozmiennych i jej postać.	3
<b>W17</b>	Formy różniczkowe stopnia p - własności, postać kanoniczna i klasa.	3
<b>W18</b>	Różniczka zewnętrzna formy różniczkowej i jej własności.	2
<b>W19</b>	Zmiana zmiennych w formie różniczkowej.	2

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W20</b>	Pierwotna formy różniczkowej, twierdzenie Poincarego.	3
<b>W21</b>	Całka krzywoliniowa zorientowana i jej obliczanie oraz zastosowania, niezależność od drogi całkowania.	3
<b>W22</b>	Orientacja podrozmaitości $R_n$ , twierdzenie Greena - Riemanna.	3
<b>W23</b>	Całka powierzchniowa zorientowana i jej związek z całką powierzchniową niezorientowaną, Twierdzenia Greena - Gaussa - Ostrogradskiego.	3
<b>W24</b>	Twierdzenie Stokesa, elementy teorii pól wektorowych.	3

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady

N2 Zadania tablicowe

N3 Konsultacje

N4 Praca w grupach

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
<b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>	
Godziny wynikające z planu studiów	120
Konsultacje przedmiotowe	40
Egzaminy i zaliczenia w sesji	10
<b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b>	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	80
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
przygotowanie do egzaminu	50
<b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>	<b>300</b>
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	10.00

## 9 SPOSOBY OCENY

Obok obowiązkowej obecności warunkiem otrzymania zaliczenia z ćwiczeń jest uzyskanie co najmniej 50

### OCENA FORMUJĄCA

F1 Kolokwium

F2 Odpowiedź ustna

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

P1 Egzamin pisemny

P2 Egzamin ustny

P3 Średnia ważona ocen formujących

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

W1 Do egzaminu mogą przystąpić studenci, którzy otrzymali zaliczenie z ćwiczeń.

W2 Egzamin składa się z części pisemnej i części ustnej.

W3 Ocena końcowa jest średnią ważoną ocen P1, P2, P3.

### KRYTERIA OCENY

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, tzn. potrafi ze zrozumieniem podawać definicje, twierdzenia i przykłady.
NA OCENĘ 3.5	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je zilustrować przykładami i potrafi podać idee dowodów podstawowych twierdzeń.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, podawać przykłady i kontrprzykłady ilustrujące te twierdzenia, zna dowody podstawowych twierdzeń oraz ich zastosowania.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, ilustrować je przykładami, zna idee dowodów wszystkich twierdzeń oraz pełne dowody podstawowych.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi w sposób bezbłędny formułować twierdzenia, podawać przykłady oraz prezentować pełne dowody wszystkich twierdzeń.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 2.0	Student w niedostatecznym stopniu dostrzega możliwość wykorzystywania podstawowych pojęć z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student w dostatecznym stopniu potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.

NA OCENĘ 3.5	Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je uzasadnić. Potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać precyzyjne, ściśle uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi bezbłędnie, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne, ściśle uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, tzn. potrafi ze zrozumieniem podawać definicje, twierdzenia i przykłady.
NA OCENĘ 3.5	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je zilustrować przykładami i potrafi podać idee dowodów podstawowych twierdzeń.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, podawać przykłady i kontrprzykłady ilustrujące te twierdzenia, zna dowody podstawowych twierdzeń oraz ich zastosowania.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, ilustrować je przykładami, zna idee dowodów wszystkich twierdzeń oraz pełne dowody podstawowych.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi w sposób bezbłędny formułować twierdzenia, podawać przykłady oraz prezentować pełne dowody wszystkich twierdzeń.
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 2.0	Student w niedostatecznym stopniu dostrzega możliwość wykorzystywania podstawowych pojęć z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.0	Student w dostatecznym stopniu potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je uzasadnić. Potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.

NA OCENĘ 4.5	Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi bezbłędnie, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W01 K_U07	Cel 1	C1 C2 C3 C4 C5 W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 W12 W13 W14 W15	N1 N2	P1 P2 P3
EK2	K_W01 K_U07	Cel 1	C6 C7 C8 C9 C10 C11 C12 C13 C14 C15 W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 W12 W13 W14 W15	N2 N3 N4	F1 F2 P3
EK3	K_W01 K_U07	Cel 2	C16 C17 C18 C19 W16 W17 W18 W19 W20 W21 W22 W23 W24	N1 N3	P1 P2 P3
EK4	K_W01 K_U07	Cel 2	C20 C21 C22 C23 C24 W16 W17 W18 W19 W20 W21 W22 W23 W24	N2 N3	F1 F2 P3



## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1 ] **W. Kołodziej** — *Analiza Matematyczna*, Warszawa, 1983, PWN
- [2 ] **H. Cartan** — *Calcul Differentiel, Formes Differentiel*, Paris, 1967, Hermann
- [3 ] **L. M. Drużkowski** — *Analiza Matematyczna dla Fizyków*, Kraków, 1997, Wyd. UJ
- [4 ] **W. Stankiewicz** — *Zadania z Matematyki dla Wyższych Uczelni*, Warszawa, 1983, PWN

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1 ] **M. Spivak** — *Analiza Matematyczna na Rozmaitościach*, Warszawa, 1977, PWN

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr hab. Ihor MYKYTYUK (kontakt: [imykytyuk@pk.edu.pl](mailto:imykytyuk@pk.edu.pl))

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

- 1 dr hab. Ihor Mykytyuk (kontakt: [imykytyuk@pk.edu.pl](mailto:imykytyuk@pk.edu.pl))
- 2 dr Mariusz Jużyniec (kontakt: [juzyniec@pk.edu.pl](mailto:juzyniec@pk.edu.pl))
- 3 dr Witold Obłóza (kontakt: [obloza@pk.edu.pl](mailto:obloza@pk.edu.pl))

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....  
.....  
.....