

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2015/2016

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Modelowanie matematyczne

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

|                                         |                       |
|-----------------------------------------|-----------------------|
| NAZWA PRZEDMIOTU                        | Geometria             |
| NAZWA PRZEDMIOTU<br>W JĘZYKU ANGIELSKIM | Gemetry               |
| KOD PRZEDMIOTU                          | WFMiI M oIS C2 15/16  |
| KATEGORIA PRZEDMIOTU                    | Przedmioty kierunkowe |
| LICZBA PUNKTÓW ECTS                     | 3.00                  |
| SEMESTRY                                | 5                     |

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

| SEMESTR | WYKŁAD | ĆWICZENIA | LABORATORIUM | LABORATORIUM<br>KOMPUTERO-<br>WE | SEMINARIUM | PROJEKT |
|---------|--------|-----------|--------------|----------------------------------|------------|---------|
| 5       | 15     | 15        | 0            | 0                                | 0          | 0       |

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Celem przedmiotu jest wprowadzenie w geometrię krzywych i powierzchni zanurzonych w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej oraz nauczanie studentów obliczania podstawowych wielkości charakteryzujących krzywe i powierzchnie.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Analiza matematyczna, algebra liniowa

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Umiejętności** Student potrafi obliczać krzywiznę i torsję krzywej gładkiej.

**EK2 Wiedza** Trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa z nawiasem Liego danym przez iloczyn wektorowy jest algebrą Liego. Krzywa gładka jest wyznaczona z dokładnością do izometrii przez jej krzywiznę i torsję.

**EK3 Umiejętności** Wyznaczanie pola normalnego do powierzchni i operatora kształtu, różniczkowanie pól wektorowych, koneksja na powierzchni, tensor krzywizny

**EK4 Wiedza** Wyznaczanie przestrzeni stycznej do rozmaitości, obliczanie nawiasu Poissona pól wektorowych, wyznaczenie współczynników Christoffela i koneksji na powierzchni

**EK5 Umiejętności** Student potrafi wyznaczać metrykę Riemanna indukowaną na powierzchni, oblicza krzywiznę Gaussa i krzywiznę średnią, wyznacza geodetyki na powierzchniach

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

| WYKŁAD    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                  |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W1</b> | Elementy algebry liniowej, objętość równoległościanu, orientacja przestrzeni wektorowej, iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy w zorientowanej przestrzeni z iloczynem skalarnym, algebra Liego, trójwymiarowa przestrzeń wektorowa z iloczynem skalarnym jako algebra Liego, przestrzeń afiniczna                                                                                                                                     | 4                |
| <b>W2</b> | Regularna krzywa gładka, torsja i krzywizna krzywej, twierdzenie o jednoznaczności z dokładnością do ruchu sztywnego krzywej zadaną krzywizną i torsją, wzory na krzywiznę i torsję krzywej, twierdzenie charakteryzujące krzywe płaskie, wektor Darboux, linia śrubowa.                                                                                                                                                             | 4                |
| <b>W3</b> | Powierzchnie gładkie w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej, powierzchnia dana równaniem uwikłanym, przestrzeń styczna do powierzchni w punkcie, pole wektorowe na powierzchni, różniczkowanie pól wektorowych, koneksja na powierzchni, operator kształtu, nawias Poissona pól wektorowych, tensor krzywizny, Theorema Egregium Gaussa, krzywizna Gaussa, geodetyki na powierzchni, geodetyka jako krzywa o minimalnej długości. | 7                |

| ĆWICZENIA |                                                                            |                  |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                     | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>C1</b> | Rozwiązywanie zadań z algebry liniowej, iloczynu skalarnego i wektorowego, | 4                |

| ĆWICZENIA |                                                                                                                                                                                 |                  |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                          | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>C2</b> | Obliczanie wektora stycznego do krzywej, trójskianu Freneta krzywej, krzywizny i torsji krzywej                                                                                 | 4                |
| <b>C3</b> | Obliczanie przestrzeni stycznej do powierzchni, znajdowanie wektora normalnego do powierzchni, wyznaczenie tensora kształtu, wyznaczanie krzywizny Gaussa i krzywizny średniej. | 7                |

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

**N1** Wykłady

**N2** Zadania tablicowe

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

| FORMA AKTYWNOŚCI                                                                                 | ŚREDNIA LICZBA GODZIN<br>NA ZREALIZOWANIE<br>AKTYWNOŚCI |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>                                     |                                                         |
| Godziny wynikające z planu studiów                                                               | 30                                                      |
| Konsultacje przedmiotowe                                                                         | 0                                                       |
| Egzaminy i zaliczenia w sesji                                                                    | 0                                                       |
| <b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b> |                                                         |
| Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury                               | 60                                                      |
| Opracowanie wyników                                                                              | 0                                                       |
| Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji                                           | 0                                                       |
| <b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z<br/>CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>    | <b>90</b>                                               |
| SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU                                                    | 3.00                                                    |

## 9 SPOSOBY OCENY

**OCENA FORMUJĄCA**

**F1** Kolokwium

**F2** Ćwiczenie praktyczne

**OCENA PODSUMOWUJĄCA****P1 Kolokwium****KRYTERIA OCENY**

| EFEKT KSZTAŁCENIA 1 |                                                                                                                               |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 2.0        | nie spełnia wymagań na ocenę 3                                                                                                |
| NA OCENĘ 3.0        | student zna definicję krzywizny i torsji krzywej, wyznacza wektor styczny do krzywej                                          |
| NA OCENĘ 3.5        | potrafi wyznaczyć krzywiznę i torsję dowolnej krzywej                                                                         |
| NA OCENĘ 4.0        | zna charakterystykę krzywej płaskiej i okręgu                                                                                 |
| NA OCENĘ 4.5        | zna charakterystykę linii śrubowej                                                                                            |
| NA OCENĘ 5.0        | Bez błędnie i płynnie odpowiada na pytania na niższe oceny                                                                    |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 2 |                                                                                                                               |
| NA OCENĘ 2.0        | nie spełnia wymagań na ocenę 3                                                                                                |
| NA OCENĘ 3.0        | zna definicję algebry Liego i iloczynu wektorowego                                                                            |
| NA OCENĘ 3.5        | zna definicję orientacji przestrzeni wektoriowej, zna tw. o charakteryzacji krzywej przez jej krzywiznę i torsję.             |
| NA OCENĘ 4.0        | zna tw. o izomorfizmie przestrzeni z iloczynem wektorowym z algebrą Liego $\mathfrak{o}(3)$ grupy ortogonalnej                |
| NA OCENĘ 4.5        | zna wraz z dowodem tw. o izomorfizmie i charakteryzacji krzywej                                                               |
| NA OCENĘ 5.0        | Bez błędnie i płynnie odpowiada na pytania na niższe oceny                                                                    |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 3 |                                                                                                                               |
| NA OCENĘ 2.0        | nie spełnia wymagań na ocenę 3                                                                                                |
| NA OCENĘ 3.0        | zna def. pola normalnego i operatora kształtu, potrafi je wyznaczać, potrafi wyznaczać płaszczyznę styczną, zna def. koneksji |
| NA OCENĘ 3.5        | zna def. tensora krzywizny                                                                                                    |
| NA OCENĘ 4.0        | potrafi wyznaczać współczynniki Christoffela koneksji                                                                         |
| NA OCENĘ 4.5        | potrafi obliczać współrzędne tensora krzywizny                                                                                |
| NA OCENĘ 5.0        | Bez błędnie i płynnie odpowiada na pytania na niższe oceny                                                                    |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 4 |                                                                                                                               |
| NA OCENĘ 2.0        | nie spełnia wymagań na ocenę 3                                                                                                |

|                     |                                                                                                                     |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 3.0        | zna def. krzywizny Gaussa i geodetyki, zna Theoremę Egregium Gaussa                                                 |
| NA OCENĘ 3.5        | potrafi wyprowadzić wzór na geodetykę                                                                               |
| NA OCENĘ 4.0        | zna związek pomiędzy krzywizną Gaussa i tensorem krzywizny                                                          |
| NA OCENĘ 4.5        | zna dowód Theoremy Egregium                                                                                         |
| NA OCENĘ 5.0        | Bezbłędnie i płynnie odpowiada na pytania na niższe oceny                                                           |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 5 |                                                                                                                     |
| NA OCENĘ 2.0        | nie spełnia wymagań na ocenę 3                                                                                      |
| NA OCENĘ 3.0        | student potrafi wyznaczyć tensor metryczny indukowany na powierzchni, wyznacza krzywizną Gaussa i krzywiznę średnią |
| NA OCENĘ 3.5        | zna równanie geodetyki na powierzchniach                                                                            |
| NA OCENĘ 4.0        | zna tw. o minimalizowaniu odległości przez geodetykę                                                                |
| NA OCENĘ 4.5        | potrafi obliczać geodetyki na powierzchniach obrotowych                                                             |
| NA OCENĘ 5.0        | Bezbłędnie i płynnie odpowiada na pytania na niższe oceny                                                           |

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|---------------|
| EK1               | K_W01 K_W02<br>K_U01 K_U12<br>K_U18                                            | Cel 1           | W2 C2             | N1 N2                 | F1 P1         |
| EK2               | K_W01 K_W04<br>K_W07                                                           | Cel 1           | W1 C1             | N1 N2                 | F1 P1         |
| EK3               | K_U16 K_U20<br>K_U21                                                           | Cel 1           | W3 C3             | N1 N2                 | F1 P1         |
| EK4               | K_W07 K_K01<br>K_K02                                                           | Cel 1           | W3 C3             | N1 N2                 | F1 P1         |
| EK5               | K_U18 K_U19<br>K_U22                                                           | Cel 1           | W3 C3             | N1 N2                 | F1 P1         |

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | John Oprea — *Geometria różniczkowa i jej zastosowania*, Warszawa, 2002, PWN  
[2] | M. Postnikov — *Lectures in geometry*, Moskwa, 1989, MIR  
[3] | John A. Thorpe — *Elementary topics in Differential Geometry*, New York, 1989, Springer-Verlag

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] | Jacek Gancarzewicz — *Algebra liniowa i jej zastosowania*, Kraków, 2004, Wydawnictwo UJ

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr hab. Włodzimierz Jelonek (kontakt: [wjelon@pk.edu.pl](mailto:wjelon@pk.edu.pl))

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr hab. Włodzimierz Jelonek (kontakt: [wjelon@pk.edu.pl](mailto:wjelon@pk.edu.pl))

2 mgr Grzegorz Zborowski (kontakt: )

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejscowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....  
.....